CHAPITRE 11 : FONCTIONS LINEAIRES.

OBJECTIFS :

1. Savoir déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
2. Savoir déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.
3. Savoir représenter graphiquement une fonction linéaire.
4. Savoir lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.

Activités :

I. DEFINITION.

Définition 1 :

Deux grandeurs sont proportionnelles s'il est possible de calculer la valeur de l'une des grandeurs en multipliant la valeur de l'autre par un nombre, toujours le même, noté *a*, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple 1 :

Voici un tableau de proportionnalité donnant le prix du raisin en fonction de sa masse.

Masse x (en kg)	1	3	4	6
Prix y (en €)	3,50	10,50	14	21

$\times 3{,}5$

Le coefficient de proportionnalité est 3,5.

Les deux grandeurs (masse et prix) sont proportionnelles.

Proposition 1 :

Soit a un nombre relatif.

Une situation de proportionnalité peut être **modélisée** (représentée) par la fonction $f : x \mapsto ax$.

Une telle fonction est une **fonction linéaire** de coefficient a qui, à un nombre x, associe le produit de ce nombre par a.

Exemple 2 :

En reprenant la situation de l'exemple 1, il vient : $p : x \mapsto 3{,}5x$.

Exemple 3 :

Soit la fonction $g : x \mapsto -5x$. L'image par la fonction g est le produit de (-5) par x. La fonction g est linéaire de coefficient -5.

Soit la fonction $h : x \mapsto 2x^2$. La fonction h n'est pas linéaire car x est élevé au carré.

Remarque 1 :

Pour une fonction f linéaire de coefficient a, on a : $f(0) = 0$ et $f(1) = a$.

II. METHODES.

A. CALCUL D'IMAGES ET D'ANTECEDENTS.

Dans la suite de ce paragraphe, on considère une fonction linéaire *f* de coefficient *a*, **non nul**.

Proposition 2 :

Tout nombre admet un et un seul antécédent par la fonction linéaire *f*.

Méthode 1 :

Pour calculer **l'image** d'un nombre par la fonction linéaire *f*, il faut **multiplier** ce nombre par *a*.

Pour calculer **l'antécédent** d'un nombre par la fonction linéaire *f*, il faut **diviser** ce nombre par *a*.

Exemple 4 :

Soit la fonction linéaire $g : x \mapsto -3x$.

L'image de 5 par la fonction g est $5\times(-3)=-15$. On note : $g(5)=-15$.

L'antécédent de 7,5 est $7,5\div(-3)=-2,5$. On note $g(-2,5)=7,5$.

B. EXPRESSION ALGEBRIQUE.

Méthode 2 :

Pour déterminer une fonction linéaire, il suffit de connaître le coefficient *a*.

On a : $a=\dfrac{\text{image}}{\text{antécédent}}$.

Exemple 5 :

Soit une fonction linéaire *y* tel que : $y(10)=2$.

y étant linéaire, il vient : $y(x)=ax$ où *a* est le coefficient de cette fonction.

Et $a=\dfrac{2}{10}=0,2$.

Ainsi, *y* est définie par : $y : x \mapsto 0,2x$.

C. REPRESENTATION GRAPHIQUE.

Proposition 3 :

La représentation graphique, dans un repère, d'une fonction linéaire de coefficient *a* est une droite passant par l'origine du repère.

On appelle *a* le coefficient directeur de la droite.

Méthode 3 :

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient *a*, il suffit de trouver les coordonnées d'un point **différent de l'origine**.

Exemple 6 :

Si $a>0$:

Soit la fonction $j : x \mapsto \dfrac{3}{4}x$.

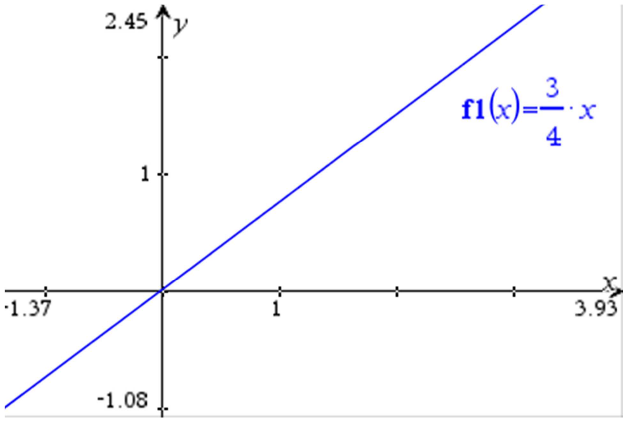
Si $a<0$:

Soit la fonction $k : x \mapsto -2x$.

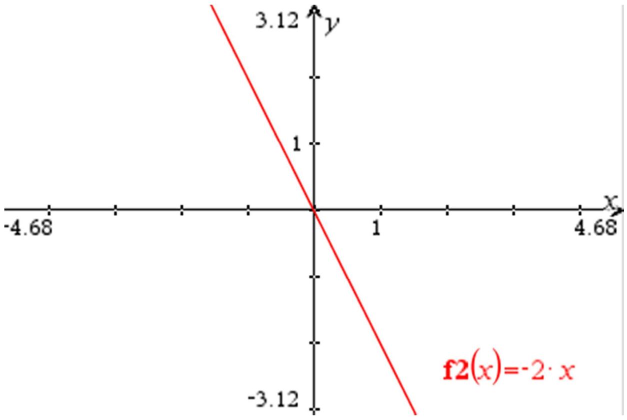
Nous avons $j(0)=0$ et $k(1)=-2\times(1)=-2$.

Nous avons $j(0)=0$ et $j(1)=\frac{3}{4}\times(1)=\frac{3}{4}=0,75$. Donc la droite de sa représentation graphique passera par les points $O(0;0)$ et $A(1;0,75)$.

Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{3}{4}$.



Donc la droite de sa représentation graphique passera par les points $O(0;0)$ et $B(1;-2)$.
Le coefficient directeur de cette droite est -2.



D. ANTECEDENTS ET IMAGES PAR METHODE GRAPHIQUE.

Méthode 4 :

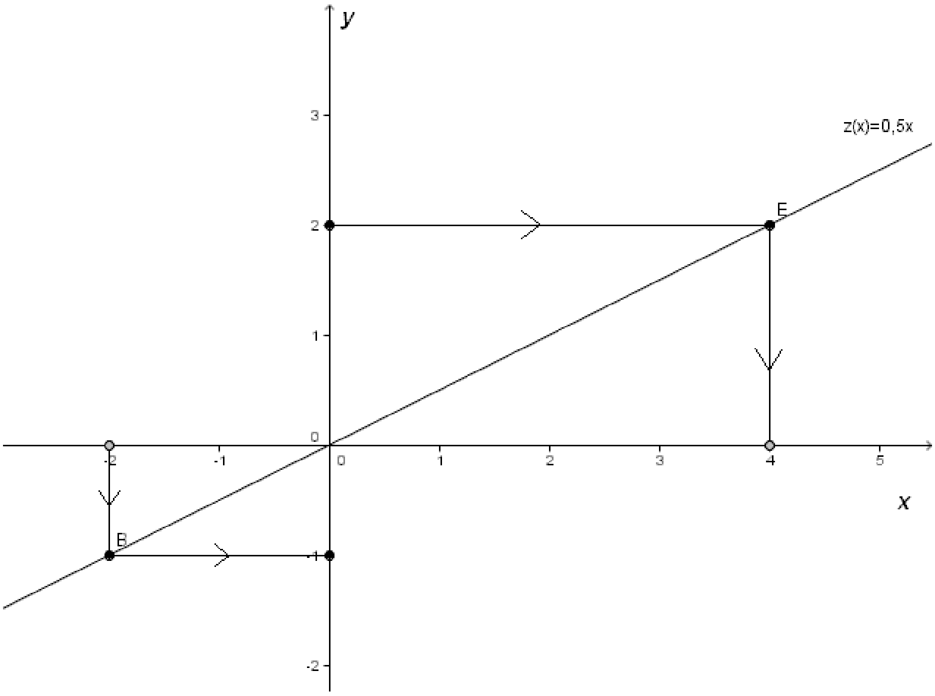
Soit une fonction linéaire *f* de coefficient *a*.
L'image d'un nombre par la fonction *f* est l'ordonnée du point d'abscisse ce nombre.
L'antécédent d'un nombre par la fonction *f* est l'abscisse du point d'ordonnée ce nombre.

Exemple 5 :

Soit la fonction linéaire *z*.

Pour déterminer l'image de -2 par la fonction *z*, il faut déterminer le point d'abscisse -2 sur la droite : c'est $B(-2;-1)$. Donc l'image de -2 par la fonction *z* est -1.

Pour déterminer l'antécédent de 2 par la fonction z, il faut déterminer le point d'ordonnée 2 sur la droite : c'est $E(4;2)$. Donc l'antécédent de 2 par la fonction *z* est 4.



III. VARIATION D'UNE QUANTITE EN POURCENTAGE.

Définition 3 :

Pour **augmenter** une quantité de p %, il faut la **multiplier** par $1+\frac{p}{100}$.

Une **augmentation** de p % est modélisée par la fonction linéaire : $f : x \mapsto \left(1+\frac{p}{100}\right)x$.

Exemple 6 :

Un article coûte 20 € ; son prix augmente de 3 %. Quel est son nouveau prix ?

$\left(1+\frac{3}{100}\right)\times 20 = 1,03 \times 20 = 20,6$

Le nouveau prix est de $20,60$ €.

Définition 4 :

Soit p un nombre compris entre 0 et 100.

Pour **diminuer** une quantité de p %, il faut la multiplier par $1-\frac{p}{100}$.

Une **diminution** de p % est modélisée par la fonction linéaire : $f : x \mapsto \left(1-\frac{p}{100}\right)x$.

Exemple 7 :

Un article coûte 15 € ; son prix diminue de 5 %. Quel est son nouveau prix ?

$\left(1-\frac{5}{100}\right)\times 15 = 0,95 \times 15 = 14,25$

Le nouveau prix est de $14,25$ €.