CHAPITRE 07 : ARITHMETIQUE.

OBJECTIFS :

1. Savoir déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.
2. Savoir simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

Activités :

I. DEFINITION.

Définition 1 :

Soit a et b des nombres entiers positifs (avec $b \neq 0$) tels que : $a = b \times k$ ou $\frac{a}{b} = k$ avec k un entier. Dans ce cas, on dit :

- a est un **multiple** de b ;
- a est **divisible** par b ;
- b est un **diviseur** de a ;
- b **divise** a.

Exemple 1 :

$26 \times 31 = 806$.
806 est un multiple de 26. C'est aussi un multiple de 31.
26 est un diviseur de 806.
31 est aussi un diviseur de 806.

Exemple 2 :

Lister l'ensemble des diviseurs de 42.

$42 = 1 \times 42$ Un nombre est toujours divisible par 1 et lui-même.
$42 = 2 \times 21$
$42 = 3 \times 14$
$42 = 6 \times 7$ Le diviseur suivant étant 7, on peut s'arrêter là car on l'a déjà trouvé.

La liste des diviseurs de 42 est donc : $\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42\}$.

Définition 2 : division euclidienne.

Soit a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie qu'il faut trouver deux nombres q et r tels que : $a = b \times q + r$ **et** $r < b$.
q est appelé le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple 3 :

Faire la division euclidienne de 68 par 14.
$68 = 14 \times 4 + 12$ et $12 < 14$. 4 est le quotient et 12 le reste de cette division euclidienne.

Exercices proposés :

II. PGCD.

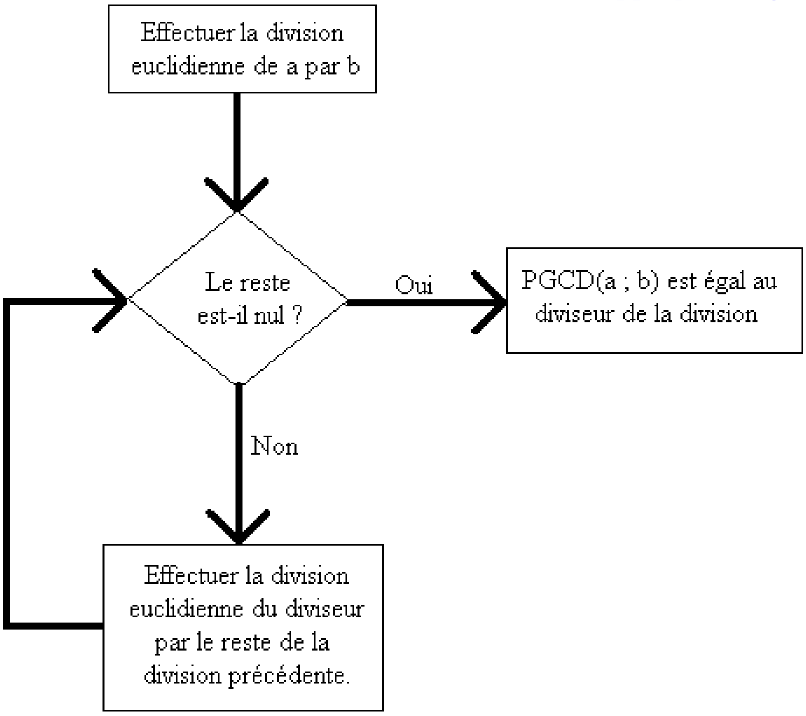
Définition 3 :

Soit a et b deux nombres entiers positifs.

Le plus grand diviseur à a et b est appelé le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur) de a et b. On le note : $\text{PGCD}(a\,;b)$.

Méthode 1 : Algorithme d'Euclide.

Pour déterminer le PGCD de deux nombres on applique l'organigramme suivant :



Exemple 4 :

Calculer le PGCD de 182 et 416.

$$\begin{array}{r|l} 416 & 182 \\ \cline{2-2} -364 & 2 \\ \hline 52 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 182 & 52 \\ \cline{2-2} -156 & 3 \\ \hline 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 52 & 26 \\ \cline{2-2} -52 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le reste de la dernière division est nul. Donc le PGCD de 182 et 416 est le dernier diviseur, *id est* 26. On le note : $\text{PGCD}(182\,;416)=26$.

Exercices proposés :

III. FRACTIONS IRREDUCTIBLES.

A. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX.

Définition 4 :

Deux nombres entiers non nuls sont dits **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

Exemple 5 :

D'après l'exemple 4, les nombres 182 et 416 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD est différent de 1.

Les nombres 15 et 11 sont premiers entre eux. En effet, $15 = 11 \times 1 + 4$; $11 = 4 \times 2 + 3$; $4 = 3 \times 1 + 1$ et $3 = 1 \times 3 + 0$. Donc $\text{PGCD}(15\,;11) = 1$.

B. FRACTION IRREDUCTIBLE.

Définition 5 :

Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple 6 :

Par l'exemple précédent, on sait que $\text{PGCD}(15\,;11) = 1$, donc la fraction $\frac{15}{11}$ (et de ce fait $\frac{11}{15}$) est irréductible.

Par contre, la fraction $\frac{182}{416}$ ne l'est pas.

Méthode 2 :

Si on simplifie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, alors la fraction obtenue est irréductible.

Exemple 7 :

Donner la fraction irréductible de $\frac{182}{416}$. On a : $\text{PGCD}(182\,;416) = 26$.

$$\frac{182}{416} = \frac{7 \times \boxed{26}}{16 \times \boxed{26}} = \frac{7}{16}$$

Exercices proposés :

C. BREVET.

Exemple 8 : Amérique du Nord, juin 2008.

1. En précisant la méthode utilisée, calculer le PGCD de 378 et 270.
2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.
3. Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?
4. Quelle sera la composition de chacun de ces lots ?

Solution :

1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{r|l} 378 & 270 \\ \cline{2-2} -270 & 1 \\ \hline 108 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 270 & 108 \\ \cline{2-2} -216 & 2 \\ \hline 54 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 54 \\ \cline{2-2} -108 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $\text{PGCD}(378\,;270) = 54$.

2. Le comité veut utiliser entièrement les 378 billes et 270 calots. Le nombre cherché doit diviser 378 et 270. Comme on veut le plus grand, ce nombre est le plus grand commun diviseur à 378 et 270, d'où : $\text{PGCD}(378\,;270) = 54$ (d'après la question précédente). Le comité pourra faire 54 lots identiques.
On a : $378 = 7 \times 54$ et $270 = 5 \times 54$. Donc chaque lot sera constitué de 7 billes et 5 calots.