CHAPITRE 06 : RACINES CARREES.

OBJECTIFS :

1. Connaître la définition.
2. Savoir utiliser le fait que, pour a positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.
3. Savoir utiliser les égalités, a et b étant positifs : $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (b non nul).

Activités :

I. DEFINITION.

Définition 1 :

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a.

Si a est positif, **alors** on a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé « radical ».

Proposition 1 :

Si a est positif, **alors** on a $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple 1 :

2,5 est positif donc $\left(\sqrt{2,5}\right)^2 = 2,5$.

$2^2 = 4$ et 2 est positif donc $\sqrt{4} = 2$.

$0,7^2 = 0,49$ et 0,7 est positif donc $\sqrt{0,49} = 0,7$.

$1^2 = 1$ et 1 positif donc $\sqrt{1} = 1$.

Pour trouver une valeur de $\sqrt{2}$, la calculatrice donne $1,414213562$. Attention, c'est une valeur approchée. En effet : $1,414213562^2 \neq 2$!

Remarque 1 :

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier, donc la racine carrée d'un carré parfait est un nombre entier.

La liste des premiers carrés parfaits est : $0\left(=0^2\right)$, $1\left(=1^2\right)$, $4\left(=2^2\right)$, $9\left(=3^2\right)$, $16\left(=4^2\right)$, $25\left(=5^2\right)$, $36\left(=6^2\right)$, $49\left(=7^2\right)$, $64\left(=8^2\right)$, $81\left(=9^2\right)$,$100\left(=10^2\right)\ldots$

II. MULTIPLICATION DE RADICAUX.

Proposition 2 :

Soit a et b deux nombres positifs.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Exemple 2 :

$A=\sqrt{2}\times\sqrt{18}$ $B=\sqrt{45}$

$A=\sqrt{2\times18}$ $B=\sqrt{9\times5}$

$A=\sqrt{36}$ $B=\sqrt{9}\times\sqrt{5}$

$A=\sqrt{6^2}$ $B=\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}$

$A=6$ $B=3\times\sqrt{5}$

$B=3\sqrt{5}$

III. DIVISION DE RADICAUX.

Proposition 3 :

Soit a et b deux nombres positifs avec $b\neq0$.

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 3 :

$C=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ $D=\sqrt{\frac{11}{64}}$ $E=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$C=\sqrt{\frac{75}{3}}$ $D=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{64}}$ $E=\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$C=\sqrt{25}$ $D=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8^2}}$ $E=\frac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$C=\sqrt{5^2}$

$C=5$ $D=\frac{\sqrt{11}}{8}$ $E=\frac{\sqrt{5}}{5}$

IV. ADDITION DE RADICAUX.

Remarque 2 :

⚠ Pour a et b non nuls : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$.

Exemple 4 :

$\sqrt{9}=3$ et $\sqrt{16}=4$ donc $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ tandis que $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$.

Méthode 1 :

On peut réduire la somme ou différence de **même** radicaux.
Soit a, b et c trois nombres avec c positif.

$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$.

Exemple 5 :

$$F = 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

$$F = (3+7)\sqrt{5}$$

$$F = 10\sqrt{5}$$

$$G = \sqrt{3} + \sqrt{12} - 3\sqrt{75}$$

$$G = \sqrt{3} + \sqrt{4\times 3} - 3\sqrt{25\times 3}$$

$$G = \sqrt{3} + \sqrt{4}\times\sqrt{3} - 3\times\sqrt{25}\times\sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{3} + 2\times\sqrt{3} - 3\times 5\times\sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 15\sqrt{3}$$

$$G = (1+2-15)\sqrt{3}$$

$$\boxed{G = -12\sqrt{3}}$$