CHAPITRE 02 : THEOREME DE THALES.

OBJECTIFS :

1. Connaître la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.
2. Utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.
3. Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.

Activités : Activité TI-Nspire.

I. THEOREME DE THALES.

Théorème 1 : Théorème de Thalès.

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soit B et M deux points de la droite (d) distincts de A.

Soit C et N deux points de la droite (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) **sont parallèles**, **alors** on a : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.

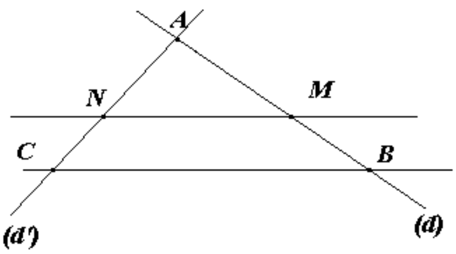
Exemple 1 :

Sur la figure ci-contre, on a : les points C, N, A d'une part, et B, M, A d'autre part sont alignés dans cet ordre. De plus $(NM)//(CB)$.

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.

D'où : $\dfrac{7}{AM} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{BC}{MN}$.

En utilisant le produit en « T » ou « Y », il vient : $AM = \dfrac{7 \times 3}{5} = \dfrac{21}{5} = 4,2$ cm.



$AC = 5$ cm ; $AN = 3$ cm ; $AB = 7$ cm. $(NM)//(CB)$

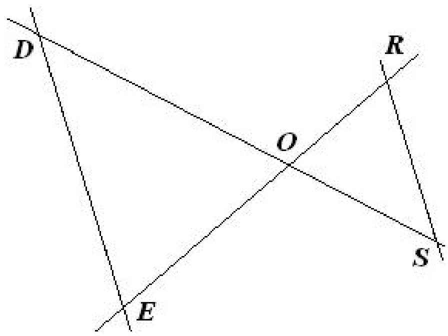
Exemple 2 :

Sur la figure ci-contre, on a : les points D, O, S d'une part, et E, O, R d'autre part sont alignés dans cet ordre. De plus $(DE)//(RS)$.

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{OR}{OE} = \dfrac{OS}{OD} = \dfrac{RS}{DE}$.

D'où : $\dfrac{OR}{4,5} = \dfrac{OS}{OD} = \dfrac{3,2}{7,2}$.

En utilisant le produit en « T » ou « Y », il vient : $OR = \dfrac{4,5 \times 3,2}{7,2} = \dfrac{45 \times 32}{720} = \dfrac{9 \times 5 \times 8 \times 2 \times 2}{9 \times 8 \times 2 \times 5} = 2$ cm.



$OE = 4,5$ cm ; $RS = 3,2$ cm et $DE = 7,2$ cm. $(DE)//(RS)$

Proposition 1 : conséquence au théorème de Thalès.

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soit B et M deux points de la droite (d) distincts de A.

Soit C et N deux points de la droite (d') distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, **alors** les droites (BC) et (MN) **ne sont pas parallèles**.

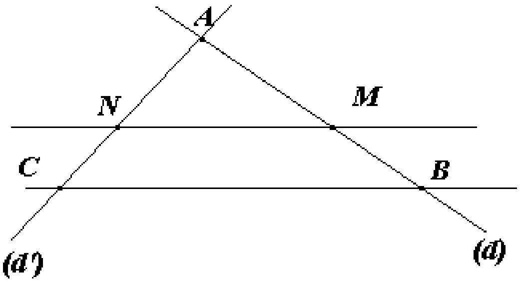
Exemple 3 :

Sur la figure ci-contre, on a : les points C, N, A d'une part, et B, M, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.

On a : $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{8} = 0,375$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$.

Donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Par conséquence du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.



$AC = 8$ cm ; $AN = 3$ cm ; $AB = 10$ cm et $AM = 4$ cm.

Exercices proposés : Exercices page .

II. RECIPROQUE AU THEOREME DE THALES.

Proposition 2 : réciproque au théorème de Thalès.

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soit B et M deux points de la droite (d) distincts de A.

Soit C et N deux points de la droite (d') distincts de A.

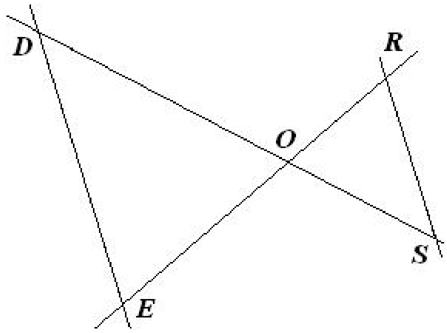
Si les points A, M et B d'une part et A, N et C d'autre part sont dans le même ordre et **si** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **alors** les droites (BC) et (MN) **sont parallèles**.

Exemple 4 :

Sur la figure ci-contre, on a : les points D, O et S d'une part et E, O et R d'autre part sont dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{DO}{OS} = \frac{5,6}{2,8} = 2$ et $\frac{OE}{OR} = \frac{4,2}{2,1} = 2$.

Donc, $\frac{DO}{OS} = \frac{OE}{OR}$ et d'après la réciproque au théorème de Thalès, les droites (DE) et (RS) sont parallèles.



$OE = 4,2$ cm ; $OS = 2,8$ cm, $OR = 2,1$ cm et $OD = 5,6$ cm

Exercices proposés : Exercices page .

III. AGRANDISSEMENT ET REDUCTION.

Définition 1 :

Un agrandissement (respectivement réduction) d'une figure $\mathcal{F}$ de rapport k est une figure $\mathcal{F}'$ dont toutes les longueurs sont proportionnelles à celles de la figure $\mathcal{F}$ où k est le coefficient de proportionnalité.

Remarque 1 :

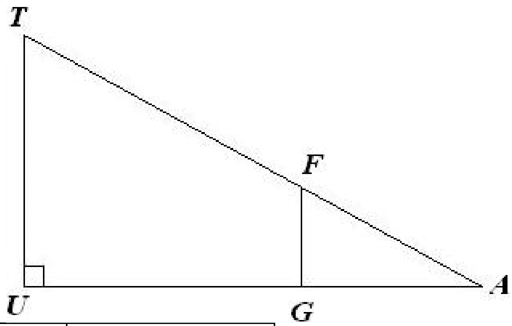
Si $k>1$, **alors** c'est un agrandissement.
Si $k<1$, **alors** c'est une réduction.

Proposition 3 :

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction, les angles de la figure $\mathcal{F}'$ ont la même mesure que ceux de la figure $\mathcal{F}$.

Exemple 5 :

T, *F* et *A* sont alignés et *U*, *G* et *A* sont alignés.
On donne : $AT=9{,}3\text{ cm}$, $AU=7{,}8\text{ cm}$, $TU=5{,}4\text{ cm}$, $AF=3{,}1\text{ cm}$, $AG=2{,}6\text{ cm}$ et $FG=1{,}8\text{ cm}$.



Longueurs du triangle *TAU*	$AT=9{,}3\text{ cm}$	$AU=7{,}8\text{ cm}$	$TU=5{,}4\text{ cm}$
Longueurs du triangle *GAF*	$AF=3{,}1\text{ cm}$	$AG=2{,}6\text{ cm}$	$FG=1{,}8\text{ cm}$

$\times 3$ $\times\frac{1}{3}$

Ainsi toutes les longueurs des deux triangles *TAU* et *GAF* sont proportionnelles. Le triangle *GAF* est une réduction du triangle *TAU*, de rapport $k=\dfrac{1}{3}$.

De plus l'angle $\widehat{TUA}$ est droit ; par conséquence de la proposition 3, l'angle $\widehat{FGA}$ est droit lui aussi.

Proposition 4 :

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport *k*, l'aire d'une surface est multipliée par k^2 et le volume d'un solide est multiplié par k^3.

Exemple 6 :

En reprenant l'exemple 5, trouvons l'aire des triangles *TAU* et *GAF*. Les triangles sont rectangles, donc :

$$\mathcal{A}_{TAU}=\frac{TU\times UA}{2}=\frac{5{,}4\times 7{,}8}{2}=21{,}06\text{ cm}^2 \text{ et } \mathcal{A}_{GAF}=\frac{FG\times GA}{2}=\frac{1{,}8\times 2{,}6}{2}=2{,}34\text{ cm}^2.$$

Et nous avons bien : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\mathcal{A}_{TAU}=\dfrac{1}{9}\times 21{,}06=2{,}34\text{ cm}^2$. *Id est* : $\mathcal{A}_{GAF}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\mathcal{A}_{TAU}$.

Exercices proposés : Exercices page .