CHAPITRE 01 : CALCULS NUMERIQUES.

OBJECTIFS :

1. Savoir opérer sur des nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée).
2. Savoir utiliser sur des exemples les égalités : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m / a^n = a^{m-n}$, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, $(ab)^m = a^m b^m$, $(a/b)^n = a^n / b^n$ où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers.

Activités : Voyage spatial (TI).

I. CALCUL FRACTIONNAIRE.

A. QUOTIENTS EGAUX.

Proposition 1 :

Un quotient n'est pas changé en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul le numérateur et le dénominateur de son écriture fractionnaire :

- Pour $k \neq 0$ et $b \neq 0$, $\dfrac{k\times a}{k\times b} = \dfrac{a}{b}$;
- Pour $b \neq 0$, $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

Méthode 1 : transformer en fraction.

Pour **transformer un quotient en fraction**, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par 10, 100 ou 1 000.

Exemple 1 :

$$A = \frac{11,3}{6,08} = \frac{11,3\times 100}{6,08\times 100} = \frac{1130}{608}$$

$$B = \frac{-3}{-4,8} = \frac{3\times 10}{48} = \frac{6\times 5}{6\times 8} = \frac{5}{8}$$

Méthode 2 : simplifier une fraction.

Pour **simplifier une fraction**, il faut :
1. Décomposer le numérateur et le dénominateur selon les tables de multiplication.
2. Supprimer ce qui est identique au numérateur et au dénominateur en l'encadrant.

Exemple 2 :

$$D = \frac{12}{-15} = -\frac{3\boxed{\times 4}}{3\boxed{\times 5}} = -\frac{4}{5}$$

$$C = \frac{64}{40} = \frac{8\boxed{\times 8}}{5\boxed{\times 8}} = \frac{8}{5}$$

B. ADDITION ET SOUSTRACTION.

Proposition 2 :

Pour calculer la somme (respectivement la différence) de deux nombres en écriture fractionnaire, il faut les réduire au **même dénominateur**, puis il faut additionner (resp. soustraire) les numérateurs et garder le dénominateur commun.

Si a, b, c désignent des nombres ($c \neq 0$), **alors** :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Exemple 3 :

$A=\frac{11}{7}-\frac{13}{7}$

$A=\frac{11-13}{7}$

$\boxed{A=\frac{-2}{7}}$

Dans ce cas, les deux fractions ont le même dénominateur.

$B=\frac{8}{25}+\frac{-4}{5}$

$B=\frac{8}{25}+\frac{-4\times 5}{25}$

$B=\frac{8-20}{25}$

$B=\frac{-12}{25}$

$\boxed{B=-\frac{12}{25}}$

Dans ce cas, le premier dénominateur est multiple de l'autre, il suffit de multiplier 5 par 5 pour avoir 25.

$C=\frac{-50}{21}+\frac{350}{12}$

$C=\frac{-50\times 4}{84}+\frac{350\times 7}{84}$

$C=\frac{-200+2450}{84}$

$C=\frac{2250}{84}$

$\boxed{C=\frac{375}{14}}$

On décompose les deux nombres :

- $21=3\times 7$;
- $12=3\times 2\times 2$.

Dans le premier dénominateur, il manque donc : 2×2. Et dans le deuxième il manque 7.

Ainsi le dénominateur commun est : $21\times 2\times 2=12\times 7=84$.

C. MULTIPLICATION.

Proposition 3 :

Pour calculer le produit de deux nombres en écriture fractionnaire, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en respectant la règle des signes pour le produit.

Si a, b, c, d sont des nombres ($b\neq 0$ et $d\neq 0$), **alors** :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Exemple 4 :

$A=\frac{7}{4}\times\left(\frac{-10}{3}\right)=\frac{7\times(-10)}{4\times 3}=-\frac{7\times 2\times 5}{2\times 2\times 3}=\boxed{-\frac{35}{6}}$

$B=-\frac{4}{5}\times\left(\frac{15}{-14}\right)=\frac{(-4)\times(-15)}{5\times 2\times 7}=\frac{2\times 2\times 5\times 3}{5\times 2\times 7}=\boxed{\frac{6}{7}}$

D. DIVISION.

Proposition 4 :

Diviser par un nombre non nul c'est multiplier par son inverse.

Si a, b, c et d désignent des nombres ($b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$), **alors** :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple 5 :

$$C = \frac{7}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{7}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$\boxed{C = \frac{21}{10}}$$

$$D = \frac{3}{7} \div \left(-\frac{9}{2,8}\right) = \frac{3}{7} \div \left(-\frac{28}{90}\right)$$

$$D = -\frac{3 \times 7 \times 2 \times 2}{7 \times 3 \times 2 \times 15}$$

$$\boxed{D = -\frac{2}{15}}$$

Exercices proposés :

II. PUISSANCE D'UN NOMBRE RELATIF.

A. NOTATION.

Définition 1 :

Quel que soit le nombre relatif non nul a et quel que soit l'entier positif n supérieur à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

De plus, $0^n = 0$, $a^1 = a$, $a^0 = 1$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$. a^{-1} est l'inverse de a.

Exemple 6 :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$,

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25} = 0,04$,

$2004^1 = 2004$,

$2005^0 = 1$,

$(-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)} = -0,5$.

B. OPERATIONS SUR LES PUISSANCES.

Proposition 5 :

Quels que soient les nombres relatifs a et b et quels que soient les entiers positifs n et p :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad \left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemple 7 :

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$,

Même nombre : 3. Donc nous calculons $2+3=5$.

$\left(5^3\right)^{-2} = 5^{3 \times (-2)} = 5^{-6}$,

Puissance de puissance. Donc nous calculons $3 \times (-2) = -6$.

$(-8)^4 \times (-8)^{-6} = (-8)^{4+(-6)} = (-8)^{-2}$,

Même nombre : -8. Donc nous calculons $4+(-6)=-2$.

$\frac{2^4}{2^7} = 2^{4-7} = 2^{-3}$,

Même nombre : 2. Donc nous calculons $4-7=-3$.

$2^3 \times 5^3 = (2\times 5)^3 = 10^3$,

Même exposant : 3. Donc nous calculons $2\times 5 = 10$.

$\frac{7^4}{14^4} = \left(\frac{7}{14}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$,

Même exposant : 4. Donc nous calculons $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

Exercices proposés :

C. NOTATION SCIENTIFIQUE.

Définition 2 :

Un nombre positif est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où :

– a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (*i.e.* : a s'écrit avec un seul chiffre autre que zéro avant la virgule),

– n est un nombre entier relatif.

Exemple 8 :

Les nombres suivants sont-ils écrits en notation scientifique ?

$A = 5{,}01 \times 10^6$, A est en notation scientifique.

$B = 0{,}92 \times 10^{-3}$, B ne l'est pas, car il y a un zéro avant la virgule.

$C = 4{,}7 \times 5^2$, C ne l'est pas, car il n'y a pas de puissance de 10.

Exemple 9 :

Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

$D = 190\,000$, $D = 1{,}9 \times 10^5$,

$E = 0{,}000\,000\,223$, $E = 2{,}23 \times 10^{-7}$.

Exercices proposés :