83. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.

Sébastien DUCHATEL pacmandx@yahoo.fr

Niveau : complémentaire
Pré requis : équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre, espaces vectoriels de fonctions.

0. Introduction

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :
(E) $ay''+by'+cy=0$.

K désignera soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 0.1
On appelle solution de (E) à valeurs dans K définie sur I une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I telle que :
$\forall t\in I, af''(t)+bf'(t)+cf(t)=0$.
On note alors $S_{I,K}$ l'ensemble des solutions de (E) à valeurs dans K définie sur I.

Définition 0.2
L'équation $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ est appelée équation caractéristique de (E).

Le but de cet exposé est de déterminer les solutions à valeurs réelles. Pour cela, nous allons dans la partie 1 déterminer les solutions complexes, puis dans la partie 2, en déduire les solutions réelles. Nous étudierons enfin des applications physiques qui nous amènent à résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre 2 sans second membre.

1. Ensemble des solutions de (E) à valeurs dans $\mathbb{C}$

Proposition 1.1
$S_{I,\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
Preuve
On montre que c'est un sous espace vectoriel de $D^2(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ deux fois dérivable sur I.

Pour $r\in\mathbb{C}$, on note $\varphi_r : \begin{array}{l} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{rt}\end{array}$ et $\phi_r : \begin{array}{l} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto te^{rt}\end{array}$

Proposition 1.2
r est solution de l'équation caractéristique de (E) si et seulement si φ_r appartient à $S_{I,\mathbb{C}}$.
Preuve
$\varphi_r \in D^2(I,\mathbb{C})$ et $\forall t \in I, a\varphi_r''(t)+b\varphi_r'(t)+c\varphi_r(t)=e^{rt}(ar^2+br+c)$ d'où l'équivalence.

Théorème 1.3
Si l'équation caractéristique de (E) admet :
i. deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors $S_{I,\mathbb{C}}=\{\alpha\varphi_{r_1}+\beta\varphi_{r_2}:(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}$.
ii. une unique solution r_0, alors $S_{I,\mathbb{C}}=\{\alpha\varphi_{r_0}+\beta\phi_{r_0}:(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}$.

Preuve
i. D'après la proposition 1.2, φ_{r_1} et φ_{r_2} sont dans $S_{I,\mathbb{C}}$. D'après la proposition 1.1, $\{\alpha\varphi_{r_1}+\beta\varphi_{r_2}:(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}\subset S_{I,\mathbb{C}}$. Soit $f\in S_{I,\mathbb{C}}$, on pose alors $u:=f\varphi_{-r_1}$ qui est dans $D^2(I,\mathbb{C})$. Comme $\forall t\in I, \varphi_{-r_1}(t)\neq 0$, on a $f=u\varphi_{r_1}$. On a ainsi : $\forall t\in I$: $f(t)=e^{r_1t}u(t)$, $f'(t)=e^{r_1t}(r_1u(t)+u'(t))$, $f''(t)=e^{r_1t}(r_1^2u(t)+2r_1u'(t)+u''(t))$. On en déduit que : $\forall t\in I, e^{r_1t}(au''(t)+(2r_1a+b)u'(t))=0$. On a donc que u' est solution à valeurs complexes définie sur I de l'équation différentielle $ay'+(2r_1a+b)y=0$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\forall t\in I, u'(t)=\lambda e^{-(2r_1+\frac{b}{a})t}$, comme $\dfrac{b}{a}=-r_1-r_2$, on a $\forall t\in I, u'(t)=\lambda e^{(r_2-r_1)t}$. On en déduit qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que $\forall t\in I, u(t)=\beta e^{(r_2-r_1)t}+\alpha$. On en déduit ainsi que $f=\alpha\varphi_{r_1}+\beta\varphi_{r_2}$ d'où $S_{I,\mathbb{C}}\subset\{\alpha\varphi_{r_1}+\beta\varphi_{r_2}:(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}$ et donc $S_{I,\mathbb{C}}=\{\alpha\varphi_{r_1}+\beta\varphi_{r_2}:(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}$.
ii. Se démontre de manière analogue.

Corollaires 1.4
i. $S_{I,\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2.
ii. Si $f\in S_{I,\mathbb{C}}$ alors $\overline{f}\in S_{I,\mathbb{C}}$.

2. Ensemble des solutions de (E) à valeurs dans $\mathbb{R}$

Cette proposition est celle qui motive à posteriori la partie 1.

Proposition 2.1
$S_{I,\mathbb{R}}=\{\mathrm{Re}(f):f\in S_{I,\mathbb{C}}\}$
Preuve
Pour ceux qui n'auraient pas réalisé, $S_{I,\mathbb{R}}\subset S_{I,\mathbb{C}}$ et une fonction réelle est partie réelle d'elle même d'où $S_{I,\mathbb{R}}\subset\{\mathrm{Re}(f):f\in S_{I,\mathbb{C}}\}$.
Par le corollaire 1.4.ii, on a $\{\mathrm{Re}(f):f\in S_{I,\mathbb{C}}\}\subset S_{I,\mathbb{R}}$. On en déduit $S_{I,\mathbb{R}}=\{\mathrm{Re}(f):f\in S_{I,\mathbb{C}}\}$.

Théorème 2.2
Si l'équation caractéristique de (E) a :

i. deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors $S_{I,\mathbb{R}} = \{\alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

ii. une unique solution réelle r_0, alors $S_{I,\mathbb{R}} = \{(\alpha t + \beta) e^{r_0 t} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

iii. Deux solutions complexes distinctes conjuguées non réelles $\lambda \pm i\mu$ alors $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t}(\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t)) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Preuve

iii. D'après le théorème 1.3, $S_{I,\mathbb{C}} = \{(\alpha_1 + i\alpha_2)e^{(\lambda+i\mu)t} + (\beta_1 + i\beta_2)e^{(\lambda-i\mu)t} : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4\}$. Soit $f \in S_{I,\mathbb{C}}$, on a donc $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $t \in I$, $f(t) = (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{(\lambda+i\mu)t} + (\beta_1 + i\beta_2)e^{(\lambda-i\mu)t}$. $\forall t \in I$, $\overline{f(t)} = (\alpha_1 - i\alpha_2)e^{(\lambda-i\mu)t} + (\beta_1 - i\beta_2)e^{(\lambda+i\mu)t}$, d'où :

$$\frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2} = \frac{1}{2}e^{\lambda t}[\alpha_1(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}) + i\alpha_2(e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) + \beta_1(e^{-i\mu t} + e^{i\mu t}) + i\beta_2(e^{-i\mu t} - e^{i\mu t})],$$

$$= \frac{1}{2}e^{\lambda t}[2\alpha_1 \cos(\mu t) - 2\alpha_2 \sin(\mu t) + 2\beta_1 \cos(\mu t) + 2\beta_2 \sin(\mu t)],$$

$$= e^{\lambda t}[(\alpha_1 + \beta_1)\cos(\mu t) + (\beta_2 - \alpha_2)\sin(\mu t)].$$

Ainsi on a : $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t}[(\alpha_1 + \beta_1)\cos(\mu t) + (\beta_2 - \alpha_2)\sin(\mu t)] : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4\}$ et comme l'application $\Phi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \mapsto (\alpha_1 + \beta_1, \beta_2 - \alpha_2) \end{array}$ est surjective ($\Phi(\alpha, 0, 0, \beta) = (\alpha, \beta)$), on en déduit $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t}(\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t)) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

i et ii se montrent de la même façon (ils sont plus simples…).

En fait, on peut remarquer que le bon intervalle de définition est $\mathbb{R}$ dans le sens où les fonctions de $S_{I,\mathbb{R}}$ sont les restrictions à I des fonctions de $S_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$.

Corollaire 2.3

$S_{I,\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Proposition 2.4

Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$. Il existe une unique fonction $f \in S_{I,\mathbb{R}}$ qui vérifie le système de conditions appelés systèmes de conditions initiales (t_0, y_0, y_0') : $\begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases}$.

Preuve

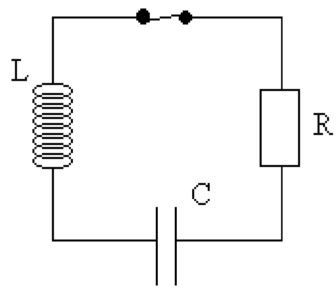
Il suffit de remarquer que $\begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases}$ est un système de Cramer.

3. Applications

Les deux exemples ci-dessous nous amène à résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$ où $(\omega_0, Q) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

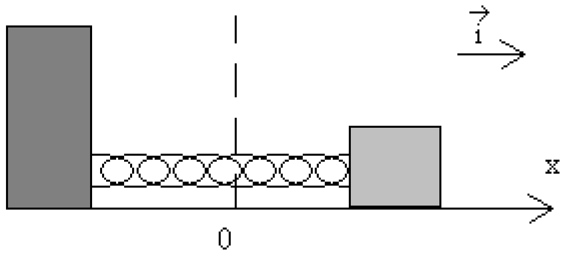
Exemple 1 : décharge d'un condensateur

Soit le circuit suivant : une résistance R, une bobine d'induction d'inductance L non nulle, un condensateur de capacité C non nulle en série chargé à l'instant 0 et un interrupteur. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Soit $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t. On en déduit que q est solution de l'équation différentielle : $Ly''+Ry'+\frac{1}{C}y=0$.



On pose alors $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Exemple 2 : Oscillateur mécanique

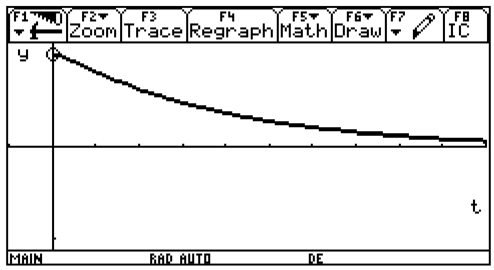


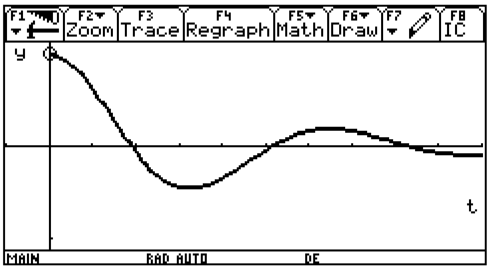
Soit un objet (que l'on supposera ponctuel !) de masse m non nulle se déplaçant sur un axe horizontal (Ox) accroché à un ressort de raideur non nulle k et subissant des frottements fluides proportionnels à sa vitesse (la constante est f) (il y a de l'huile sur la table !). Soit $x(t)$ la position de notre objet sur l'axe (Ox). On en déduit que x est solution de l'équation différentielle : $my''+fy'+ky=0$ (voir Sylvain ou un collègue de physique pour plus de détails…). On pose $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q=\frac{1}{f}\sqrt{km}$.

Pour ces deux exemples, des considérations physiques (continuité des paramètres physiques et charge à l'instant initial) nous amènent à considérer des solutions réelles définies sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant le système de conditions initiales $(0,y_0,0)$ où $y_0\in\mathbb{R}_+^*$.

Nous allons fixer ω_0 et y_0 (par exemple $\omega_0=1$ et $y_0=1$) et faire varier le facteur de qualité Q. Ceci revient à fixer toutes les constantes physiques sauf la résistance dans l'exemple 1 et le coefficient de frottement dans l'exemple 2. On remarque de plus que les frottements sont inversement proportionnels au facteur de qualité. L'équation caractéristique de (E') est $\lambda^2+\frac{\omega_0}{Q}\lambda+\omega_0{}^2=0$. Soit le discriminant $\Delta=\omega_0{}^2(\frac{1}{Q^2}-4)$.

Si $0<Q<\frac{1}{2}$, la solution est de la forme $\alpha e^{r_1t}+\beta e^{r_2t}$ où $r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}(1\pm\sqrt{1-4Q^2})<0$. On dit alors que le régime est apériodique.



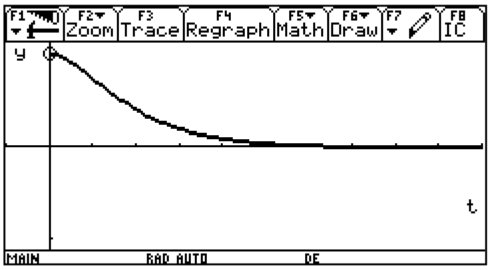


Si $Q > \frac{1}{2}$, la solution est $y_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\omega_0 t)$.

On dit que le régime est pseudo-périodique.

Si $Q = \frac{1}{2}$, la solution est de la forme $e^{-\frac{1}{2\omega_0}t}(\alpha t + \beta)$.

On dit alors que le régime est critique.



On peut ainsi mettre en évidence les différentes évolutions en fonction des frottements. Dans tous les cas, on remarque $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

4. Questions posées à la fin de l'exposé

Résoudre l'équation différentielle avec un second membre du type $\cos(\alpha t)$.

Démontrer que les $S_{I,\mathbb{R}}$ sont bien des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimensions 2.