

## 83. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.

Sébastien DUCHATEL [pacmandx@yahoo.fr](mailto:pacmandx@yahoo.fr)

*Niveau* : complémentaire

*Pré requis* : équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre, espaces vectoriels de fonctions.

### 0. Introduction

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ . Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ . On considère l'équation différentielle :

$$(E) ay'' + by' + cy = 0.$$

$K$  désignera soit  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 0.1

On appelle solution de (E) à valeurs dans  $K$  définie sur  $I$  une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fois dérivable sur  $I$  telle que :

$$\forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0.$$

On note alors  $S_{I,K}$  l'ensemble des solutions de (E) à valeurs dans  $K$  définie sur  $I$ .

#### Définition 0.2

L'équation  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  est appelée équation caractéristique de (E).

Le but de cet exposé est de déterminer les solutions à valeurs réelles. Pour cela, nous allons dans la partie 1 déterminer les solutions complexes, puis dans la partie 2, en déduire les solutions réelles. Nous étudierons enfin des applications physiques qui nous amènent à résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre 2 sans second membre.

### 1. Ensemble des solutions de (E) à valeurs dans $\mathbb{C}$

#### Proposition 1.1

$S_{I,\mathbb{C}}$  est un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel.

Preuve

On montre que c'est un sous espace vectoriel de  $D^2(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  deux fois dérivable sur  $I$ .

Pour  $r \in \mathbb{C}$ , on note  $\varphi_r : \begin{matrix} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{rt} \end{matrix}$  et  $\phi_r : \begin{matrix} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto te^{rt} \end{matrix}$

**Proposition 1.2**

$r$  est solution de l'équation caractéristique de (E) si et seulement si  $\varphi_r$  appartient à  $S_{I,\mathbb{C}}$ .

Preuve

$\varphi_r \in D^2(I, \mathbb{C})$  et  $\forall t \in I, a\varphi_r''(t) + b\varphi_r'(t) + c\varphi_r(t) = e^{rt}(ar^2 + br + c)$  d'où l'équivalence.

**Théorème 1.3**

Si l'équation caractéristique de (E) admet :

- i. deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $S_{I,\mathbb{C}} = \{\alpha\varphi_{r_1} + \beta\varphi_{r_2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ .
- ii. une unique solution  $r_0$ , alors  $S_{I,\mathbb{C}} = \{\alpha\varphi_{r_0} + \beta\phi_{r_0} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ .

Preuve

- i. D'après la proposition 1.2,  $\varphi_{r_1}$  et  $\varphi_{r_2}$  sont dans  $S_{I,\mathbb{C}}$ . D'après la proposition 1.1,  $\{\alpha\varphi_{r_1} + \beta\varphi_{r_2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\} \subset S_{I,\mathbb{C}}$ . Soit  $f \in S_{I,\mathbb{C}}$ , on pose alors  $u := f\varphi_{-r_1}$  qui est dans  $D^2(I, \mathbb{C})$ . Comme  $\forall t \in I, \varphi_{-r_1}(t) \neq 0$ , on a  $f = u\varphi_{r_1}$ . On a ainsi :  $\forall t \in I : f(t) = e^{r_1 t}u(t)$ ,  $f'(t) = e^{r_1 t}(r_1 u(t) + u'(t))$ ,  $f''(t) = e^{r_1 t}(r_1^2 u(t) + 2r_1 u'(t) + u''(t))$ . On en déduit que :  $\forall t \in I, e^{r_1 t}(au''(t) + (2r_1 a + b)u'(t)) = 0$ . On a donc que  $u'$  est solution à valeurs complexes définie sur  $I$  de l'équation différentielle  $ay' + (2r_1 a + b)y = 0$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\forall t \in I, u'(t) = \lambda e^{-\frac{(2r_1 + b)}{a}t}$ , comme  $\frac{b}{a} = -r_1 - r_2$ , on a  $\forall t \in I, u'(t) = \lambda e^{(r_2 - r_1)t}$ . On en déduit qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tels que  $\forall t \in I, u(t) = \beta e^{(r_2 - r_1)t} + \alpha$ . On en déduit ainsi que  $f = \alpha\varphi_{r_1} + \beta\varphi_{r_2}$  d'où  $S_{I,\mathbb{C}} \subset \{\alpha\varphi_{r_1} + \beta\varphi_{r_2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$  et donc  $S_{I,\mathbb{C}} = \{\alpha\varphi_{r_1} + \beta\varphi_{r_2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ .
- ii. Se démontre de manière analogue.

**Corollaires 1.4**

- i.  $S_{I,\mathbb{C}}$  est un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension 2.
- ii. Si  $f \in S_{I,\mathbb{C}}$  alors  $\overline{f} \in S_{I,\mathbb{C}}$ .

**2. Ensemble des solutions de (E) à valeurs dans  $\mathbb{R}$** 

Cette proposition est celle qui motive à posteriori la partie 1.

**Proposition 2.1**

$$S_{I,\mathbb{R}} = \{\text{Re}(f) : f \in S_{I,\mathbb{C}}\}$$

Preuve

Pour ceux qui n'auraient pas réalisé,  $S_{I,\mathbb{R}} \subset S_{I,\mathbb{C}}$  et une fonction réelle est partie réelle d'elle même d'où  $S_{I,\mathbb{R}} \subset \{\text{Re}(f) : f \in S_{I,\mathbb{C}}\}$ .

Par le corollaire 1.4.ii, on a  $\{\text{Re}(f) : f \in S_{I,\mathbb{C}}\} \subset S_{I,\mathbb{R}}$ . On en déduit  $S_{I,\mathbb{R}} = \{\text{Re}(f) : f \in S_{I,\mathbb{C}}\}$ .

**Théorème 2.2**

Si l'équation caractéristique de (E) a :

- i. deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $S_{I,\mathbb{R}} = \{\alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- ii. une unique solution réelle  $r_0$ , alors  $S_{I,\mathbb{R}} = \{(\alpha t + \beta) e^{r_0 t} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- iii. Deux solutions complexes distinctes conjuguées non réelles  $\lambda \pm i\mu$  alors  $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t} (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t)) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Preuve

iii. D'après le théorème 1.3,  $S_{I,\mathbb{C}} = \{(\alpha_1 + i\alpha_2)e^{(\lambda+i\mu)t} + (\beta_1 + i\beta_2)e^{(\lambda-i\mu)t} : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4\}$ .

Soit  $f \in S_{I,\mathbb{C}}$ , on a donc  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$  tels que pour tout  $t \in I$ ,  $f(t) = (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{(\lambda+i\mu)t} + (\beta_1 + i\beta_2)e^{(\lambda-i\mu)t}$ .  $\forall t \in I$ ,  $\overline{f(t)} = (\alpha_1 - i\alpha_2)e^{(\lambda-i\mu)t} + (\beta_1 - i\beta_2)e^{(\lambda+i\mu)t}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2} &= \frac{1}{2} e^{\lambda t} [\alpha_1 (e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}) + i\alpha_2 (e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) + \beta_1 (e^{-i\mu t} + e^{i\mu t}) + i\beta_2 (e^{-i\mu t} - e^{i\mu t})], \\ &= \frac{1}{2} e^{\lambda t} [2\alpha_1 \cos(\mu t) - 2\alpha_2 \sin(\mu t) + 2\beta_1 \cos(\mu t) + 2\beta_2 \sin(\mu t)], \\ &= e^{\lambda t} [(\alpha_1 + \beta_1) \cos(\mu t) + (\beta_2 - \alpha_2) \sin(\mu t)]. \end{aligned}$$

Ainsi on a :  $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t} [(\alpha_1 + \beta_1) \cos(\mu t) + (\beta_2 - \alpha_2) \sin(\mu t)] : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4\}$  et comme

l'application  $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est surjective ( $\Phi(\alpha, 0, 0, \beta) = (\alpha, \beta)$ ), on

en déduit  $S_{I,\mathbb{R}} = \{e^{\lambda t} (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t)) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .

i et ii se montrent de la même façon (ils sont plus simples...).

En fait, on peut remarquer que le bon intervalle de définition est  $\mathbb{R}$  dans le sens où les fonctions de  $S_{I,\mathbb{R}}$  sont les restrictions à  $I$  des fonctions de  $S_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$ .

### Corollaire 2.3

$S_{I,\mathbb{R}}$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension 2.

### Proposition 2.4

Soient  $t_0 \in I$  et  $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ . Il existe une unique fonction  $f \in S_{I,\mathbb{R}}$  qui vérifie le système de conditions appelés systèmes de conditions initiales  $(t_0, y_0, y_0')$  :  $\begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases}$ .

Preuve

Il suffit de remarquer que  $\begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases}$  est un système de Cramer.

## 3. Applications

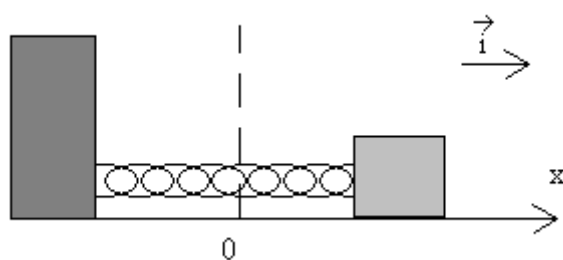
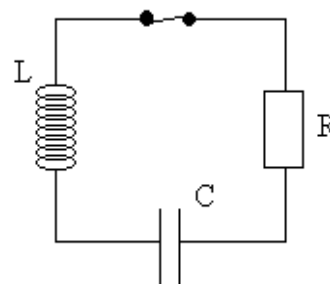
Les deux exemples ci-dessous nous amène à résoudre l'équation différentielle (E') :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0 \text{ où } (\omega_0, Q) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

### Exemple 1 : décharge d'un condensateur

Soit le circuit suivant : une résistance  $R$ , une bobine d'induction d'inductance  $L$  non nulle, un condensateur de capacité  $C$  non nulle en série chargé à l'instant 0 et un interrupteur. A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur. Soit  $q(t)$  la charge du condensateur à l'instant  $t$ . On en déduit que  $q$  est solution de l'équation différentielle :  $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0$ .

On pose alors  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .



### Exemple 2 : Oscillateur mécanique

Soit un objet (que l'on supposera ponctuel !) de masse  $m$  non nulle se déplaçant sur un axe horizontal ( $Ox$ ) accroché à un ressort de raideur non nulle  $k$  et subissant des frottements fluides proportionnels à sa vitesse (la constante est  $f$ ) ( il y a de l'huile sur la table ! ). Soit  $x(t)$  la position de notre

objet sur l'axe ( $Ox$ ). On en déduit que  $x$  est solution de l'équation différentielle :  $my'' + fy' + ky = 0$  (voir Sylvain ou un collègue de physique pour plus de détails...). On pose

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{1}{f} \sqrt{km}$ .

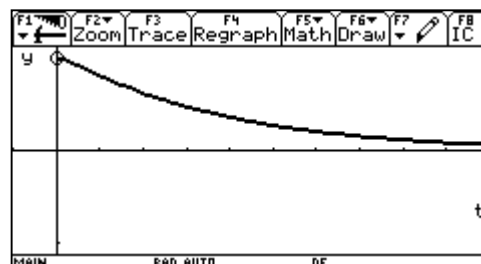
Pour ces deux exemples, des considérations physiques ( continuité des paramètres physiques et charge à l'instant initial ) nous amènent à considérer des solutions réelles définies sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifiant le système de conditions initiales  $(0, y_0, 0)$  où  $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .

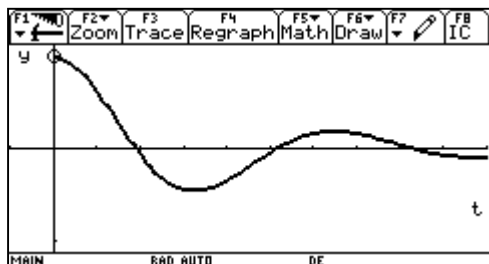
Nous allons fixer  $\omega_0$  et  $y_0$  ( par exemple  $\omega_0 = 1$  et  $y_0 = 1$ ) et faire varier le facteur de qualité  $Q$ . Ceci revient à fixer toutes les constantes physiques sauf la résistance dans l'exemple 1 et le coefficient de frottement dans l'exemple 2. On remarque de plus que les frottements sont inversement proportionnels au facteur de qualité. L'équation caractéristique de ( $E'$ ) est

$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Soit le discriminant  $\Delta = \omega_0^2 (\frac{1}{Q^2} - 4)$ .

Si  $0 < Q < \frac{1}{2}$ , la solution est de la forme  $\alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$

où  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}) < 0$ . On dit alors que le régime est apériodique.



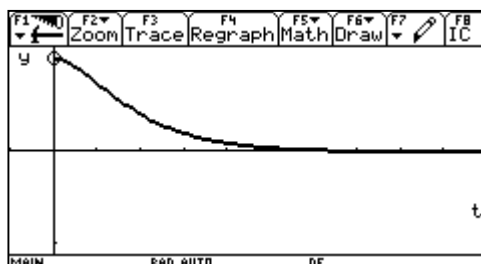


Si  $Q > \frac{1}{2}$ , la solution est  $y_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega_0 t\right)$ .

On dit que le régime est pseudo-périodique.

Si  $Q = \frac{1}{2}$ , la solution est de la forme  $e^{-\frac{1}{2\omega_0} t} (\alpha t + \beta)$ .

On dit alors que le régime est critique.



On peut ainsi mettre en évidence les différentes évolutions en fonction des frottements. Dans tous les cas, on remarque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

#### 4. Questions posées à la fin de l'exposé

Résoudre l'équation différentielle avec un second membre du type  $\cos(\alpha t)$ .

Démontrer que les  $S_{I, \mathbb{R}}$  sont bien des  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels de dimensions 2.