ETIENNE Sylvain
PLC 1, groupe 1

EXPOSE 82 : Caractérisation de la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^{ax}$, où *a* appartient à $\mathbb{R}$, par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.

Niveau : Terminale S.

Pré-requis : Théorèmes sur les limites – Continuité – Dérivabilité – Théorème des valeurs intermédiaires – Suite convergente – Suites adjacentes –

I. INTRODUCTION.

Il existe de nombreuses situations en sciences expérimentales et en sciences économiques dans lesquelles des phénomènes peuvent être modélisés par des équations du type $y' = ay$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I*. Nous allons, dans un premier temps définir une fonction qui satisfait cette équation. Puis, nous verrons quelques propriétés de cette fonction. Enfin, nous donnerons quelques applications.

II. INTRODUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Théorème 1 :

> L'équation différentielle $y' = y$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ et prenant la valeur 1 en 0.

Démonstration :

L'existence est admise pour l'instant. Cependant, nous montrerons dans les applications que la méthode de la tangente d'Euler permet une bonne approximation d'une solution, et même de donner l'existence d'une telle fonction.

Pour ce qui est de l'unicité, soit *f* une fonction vérifiant les hypothèses du théorème, alors montrons d'abord que *f* ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(-x) = 1$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left(f(x)f(-x)\right)' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$. Donc la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 car $f(0) = 1$.

Prenons à présent deux fonctions *f* et *g* vérifiant les hypothèses du théorème, alors *f* et *g* ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = 0.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 car $f(0) = g(0) = 1$. Nous obtenons bien que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x)$. □

Définition :

L'unique fonction vérifiant les hypothèses du théorème 1 est appelée fonction exponentielle et est notée $x \mapsto e^x$.

Remarques :
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Nous avons $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^x\right)' = e^x$ et $e^0 = 1$

III. L'EQUATION *y'=ay* ET PROPRIETES DE L'EXPONENTIELLE.

A) UN PREMIER THEOREME.

Théorème 2 :

Soit a et y_0 appartenant à $\mathbb{R}$. Il existe une unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = ay(x), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

C'est la fonction $x \mapsto y_0 e^{ax}$.

Démonstration :

Si f est une solution, l'application $x \mapsto f(x)e^{-ax}$ est dérivable. Ainsi, nous avons : $\left(f(x)e^{-ax}\right)' = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0$. L'application précédente est donc constante et vaut y_0 car $f(0)e^0 = y_0$. Nous obtenons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y_0 e^{ax}$.

Réciproquement, la fonction $f : x \mapsto y_0 e^{ax}$ vérifie bien les hypothèses du théorème. □

B) PROPRIETES ALGEBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Théorème 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(0) = 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

-i- $\exists a \in \mathbb{R}\ f(x) = e^{ax}$,

-ii- $\exists a \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x)$,

-iii- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$.

Démonstration :
- -i- $\Leftrightarrow$ -ii- par le théorème 2.
- -ii- $\Rightarrow$ -iii- : Fixons β, alors les applications $x \mapsto f(x+\beta)$ et $x \mapsto f(\beta)f(x)$ vérifient l'équation $y' = ay$ et valent $f(\beta)$ en 0. Donc, par le théorème 2 les deux applications sont égales pour tout x. □

- -iii- $\Rightarrow$ -ii- : Fixons β, alors dérivons les applications : $x \mapsto f(x+\beta)$ et $x \mapsto f(\beta)f(x)$. Nous obtenons : $f'(x+\beta) = f'(x)f(\beta)$, *i.e.* : $f'(\beta) = f'(0)f(\beta)$ en prenant $x = 0$. Si nous posons $a = f'(0)$, alors $f'(\beta) = af(\beta)$ pour tout β.

Remarque :

- Avec les notations précédentes, nous avons : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$.

C) ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Proposition 4 :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Nous savons déjà que l'exponentielle ne s'annule pas. De plus, soit $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction exponentielle est strictement positive. Comme $\left(e^x\right)' = e^x$, le théorème est montré. □

Proposition 5 : Tableau de variation.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
exp'(x)	$+$
exp	$0 \nearrow +\infty$

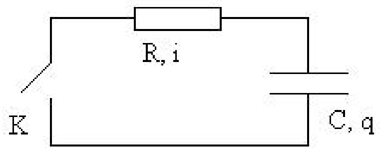
Démonstration :
Par la proposition précédente, nous savons que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer les limites en $\pm\infty$.

Soit g la fonction définie par $x \mapsto e^x - x$ sur $[0; +\infty[$. g est continue, dérivable et $g(0) = 1$. Soit $x \in [0; +\infty[$, nous avons $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$. Donc g est croissante et minorée par 1, *i.e.* : $g > 0$ sur $[0; +\infty[$. Par le théorème de comparaison, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

En effectuant le changement d'écriture : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, le théorème sur les limites de fonctions composées nous donne $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$, et ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. □

IV. APPLICATIONS.

A) UN PEU DE PHYSIQUE : LE CIRCUIT RC.



Considérons le circuit ci-contre. Le condensateur est, à l'instant initial, de charge *Q*. Il s'agit d'étudier la fonction *q* lorsque nous fermons l'interrupteur *K*, puis de donner une interprétation de la constante de temps $\tau = RC$.

En utilisant la loi des mailles, puis celle des nœuds, la fonction *q* satisfait l'équation suivante : $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$ et $q(0) = Q$.

Nous retrouvons là l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a = -\dfrac{1}{RC}$ et la condition initiale $y(0) = y_0$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = Qe^{-t/RC}$.

Pour $t = 3\tau$, nous avons $q(3\tau) \approx 5\% \cdot Q$. Pour $t = 5\tau$, nous avons $q(5\tau) \approx 1\% \cdot Q$. Donc, lorsque $t = 5\tau$, nous pouvons dire que le condensateur est quasiment déchargé.

B) METHODE DE LA TANGENTE D'EULER.

Cette méthode nous permet de montrer l'existence d'une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 1.

Une définition du nombre dérivé s'écrit : pour *f* dérivable en x_0 nous avons $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Si de plus *f* est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et $y(0) = 1$. Ainsi, il est possible d'approcher la fonction *f* en x_0 par : $f(x_0 + h) \approx (1 + h) f(x_0)$ pour *h* proche de 0. En prenant $x_0 = 0$ et $h > 0$, nous obtenons : $f(h) \approx 1 + h$, puis $f(2h) \approx (1 + h)^2$. Enfin, par récurrence, il vient : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nh) \approx (1 + h)^n$.

Grâce à cette méthode, nous pouvons construire le programme suivant : (sur TI V200)

```
Eqdiff2()
Prgm
Local aa,xaa,yaa,hh,xmm,tr,i
ClrIO
FnOff
PlotsOff
Dialog
 Title "Equa diff y'=ay par la méthode d'Euler"
 Request "a",aa
 Request "xØ",xaa
 Request "yØ",yaa
 Request "h",hh
 Request "xm",xmm
 DropDown "Tracer une courbe",{"oui","non"},tr
EndDlog

expr(aa)→a
expr(bb)→b
expr(xaa)→xa
expr(yaa)→ya
expr(xmm)→xm
expr(hh)→h
```

```
seq(x,x,xa,xm,h)→l1
seq(Ø,x,xa,xm,h)→l2
ya→l2[1]
For i,1,(xm-xa)/h
 (1+a*h)*l2[i]→l2[i+1]
EndFor

NewPlot 1,2,l1,l2
ZoomData
Pause

If n=1 Then
 Dialog
  Request "Entrer la fonction",g
 EndDlog
 expr(g)→y1(x)
 DispG
 Pause
EndIf

DispHome
EndPrgm
```

Attention, il y a des contre-exemples : si le nombre de points n'est pas suffisant ou si l'intervalle est trop grand, ou bien encore si la fonction à approximer présente quelques particularités…

Poussons un peu plus loin le calcul…

Posons $h = \frac{x}{n}$, nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Le but serait d'arriver à montrer que : $f(x) = \lim_{n \to +\infty}\left(u_n(x)\right)$, où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Pour cela, il faudrait déjà que la suite $\left(u_n(x)\right)_n$ converge !

En fait, si nous posons : $\left(v_n(x)\right)_n = \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_n$, alors montrons que les suites $\left(u_n(x)\right)$ et $\left(v_n(x)\right)$ sont adjacentes.

<u>Lemme 6 :</u>

Pour tout réel $x > -1$ et tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

<u>Démonstration :</u>

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Si $n = 0$, la propriété est évidente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie au rang n, alors :

$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$; et ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$. □

Fixons le réel x, et prenons n tel que $n > |x|$, alors :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1},$$

$$\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right) = 1 \qquad \text{(par le lemme 6)}.$$

Donc $\left(u_n(x)\right)$ est croissante.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$; comme $\left(u_n(x)\right)$ est croissante positive pour n assez grand, la suite $\left(v_n(x)\right)$ sera décroissante à partir d'un certain rang.

De plus, nous avons :

$$v_n(x)-u_n(x)=v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)\leq v_n(x)\frac{x^2}{n^2} \qquad \text{(toujours par le lemme 6).}$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq v_n(x)-u_n(x)\leq v_n(x)\frac{x^2}{n^2}$.

Comme la suite $(v_n(x))$ est minorée par 0, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n(x)-u_n(x))=0$.

En conclusion, les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes, donc convergentes.

Il reste à montrer que $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n(x))$, satisfaisant $f(0)=1$ est bien solution de l'équation différentielle $y'=y$.

i.e. : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)$.

Soit n assez grand :

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[\left(\frac{1+\frac{x+h}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)-1\right]\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[1+\frac{h}{1+\frac{x}{n}}-1\right],$$

$$\geq h\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

D'où, en passant à la limite : $f(x+h)-f(x)\geq hf(x)$.

En remplaçant h par - h et x par x + h, nous obtenons : $f(x+h)-f(x)\leq hf(x+h)$.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} f(x+h)\geq\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq f(x), \text{ si } h>0,\\ f(x)\geq\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq f(x+h), \text{ si } h<0.\end{cases}$$

En faisant tendre h vers 0, le résultat est montré, ce qui donne l'existence du théorème 1. □

V. CONCLUSION.

Suite à la résolution d'une équation différentielle (*y' = ay*), nous mettons en place une fonction nouvelle : l'exponentielle. De plus, par la méthode d'Euler, cette fonction apparaît comme une sorte de « prolongement continu » des suites géométriques. Ce qui permet, à un niveau plus élevé, de définir l'exponentielle complexe ou d'ouvrir sur la notion de suite de fonctions.