Sylvain ETIENNE
PLC1, groupe 1
etiennesy@wanadoo.fr

INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS. EXEMPLES D'APPLICATIONS A L'ETUDE DE SUITES ET DE FONCTIONS. L'EXPOSE POURRA ETRE ILLUSTRE PAR UN OU DES EXEMPLES FAISANT APPEL A L'UTILISATION D'UNE CALCULATRICE.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Continuité – Dérivabilité – Théorème de Rolle –

I INTRODUCTION.

Lors de la détermination d'une fonction, nous regardons la dérivée de cette fonction. En effet, il y a un lien entre signe de la dérivée et croissance de la fonction. Nous allons voir un théorème qui permet effectivement le lien grâce aux accroissements finis. Puis nous verrons d'autres applications de cette inégalité.

Dans la suite de l'exposé, l'intervalle I considéré n'est pas vide !

II THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS.

A) ENONCE.

Le théorème des accroissements finis est une conséquence du théorème de Rolle. Il permet notamment de montrer l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 1 (théorème des accroissements finis) :

> Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$; alors il existe au moins un nombre c de $]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Démonstration :

Considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$g:[a,b]\to\mathbb{R},$$
$$x\mapsto f(b)-f(x)+(b-x)\cdot\frac{f(a)-f(b)}{b-a}.$$

La continuité de g sur $[a,b]$ et sa dérivabilité sur $]a,b[$ sont héritées de celles de f.

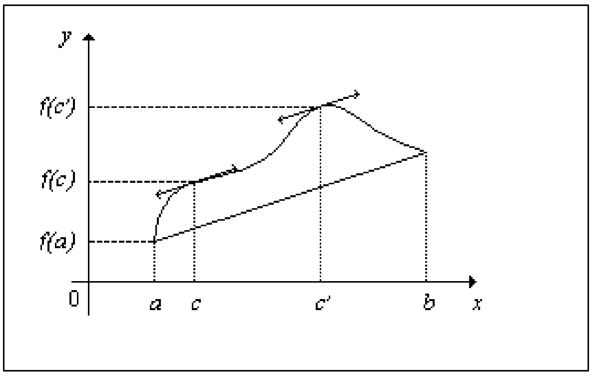
De plus, $g(a)=g(b)=0$.

Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées. Ainsi, il existe au moins un nombre c tel que : $g'(c)=0$.

i.e. : $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$. □

B) Interprétation graphique.

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, l'arc $\overset{\frown}{AB}$, courbe représentative de f sur $[a,b]$, admet en au moins un de ces points, distincts de A et B, une tangente parallèle à la droite (AB).



II INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS.

Proposition 1 :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $m\in\mathbb{R}$ (resp. $M\in\mathbb{R}$) tel que : $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)\geq m$ (resp. $f'(x)\leq M$), alors : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq m$ (resp. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$).

Démonstration :

Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont vérifiées. Ainsi il existe au moins un nombre c de $]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$. Il ne reste plus qu'à minorer ou majorer $f'(c)$.

Corollaire 1 :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\,]a,b[\;\; |f'(x)|\leq M$, alors : $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$.

Démonstration :

C'est une conséquence directe de la proposition 1 !

III APPLICATIONS.

A) SENS DE VARIATION.

Le lien entre sens de variation et signe de la dérivée se déduit instantanément de l'inégalité des accroissement finis, en remplaçant *m* (resp. *M*) par 0.
La réciproque est évidente en considérant la définition d'une fonction croissante ou décroissante.

Sylvain ETIENNE
PLC1, groupe 1
etiennesy@wanadoo.fr

Soit la fonction :

$$f:\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]\to\mathbb{R},$$
$$x\mapsto x^3-7x^2+14x-8.$$

Par exemple pour notre fonction *f* :

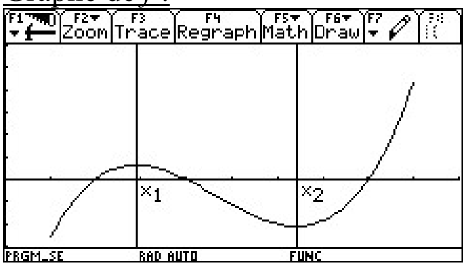
La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, donc à fortiori sur $\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$, et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left]\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right[$. Nous avons : $\forall x\in\left]\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right[,\ f'(x)=3x^2-14x+14$.

Et $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{x_1=\frac{7-\sqrt{7}}{3},x_2=\frac{7+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Nous pouvons construire le tableau de signe de f' et le comparer au graphe de *f*.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{7-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{7-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{9}{2}$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

Graphe de *f* :



Apparemment, ça a l'air de marcher… La fonction est bien croissante sur $\left]\frac{1}{2},x_1\right[$ et sur $\left]x_2,\frac{9}{2}\right[$, et décroissante sur $]x_1,x_2[$.

B) ENCADREMENT.

Montrons que : pour tous réels *a* et *b*, $|\cos b-\cos a|\le|b-a|$.

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f:x\mapsto\cos x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x$.

Et comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\le1$, le corollaire 1 conduit à : pour tous réels *a* et *b*, $|\cos b-\cos a|\le|b-a|$.

Sylvain ETIENNE
PLC1, groupe 1
etiennesy@wanadoo.fr

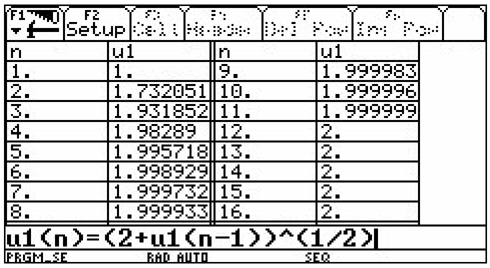
C) AVEC DES SUITES.

Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \left(2 + u_n\right)^{1/2}. \end{cases}$$

Il s'agit ici, d'étudier la suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. En effet, il est possible d'étudier la suite directement sans passer par la proposition.

Pour se donner une idée du comportement de la suite, nous pouvons regarder la suite sur la calculatrice grâce à la table de valeurs par exemple.
Sur l'écran ci-contre, nous voyons que la suite semble être croissante et tendre vers 2.



n	u1	n	u1
1.	1.	9.	1.999983
2.	1.732051	10.	1.999996
3.	1.931852	11.	1.999999
4.	1.98289	12.	2.
5.	1.995718	13.	2.
6.	1.998929	14.	2.
7.	1.999732	15.	2.
8.	1.999933	16.	2.

u1(n)=(2+u1(n−1))^(1/2)

Répondons à la question.
Commençons par définir notre fonction :

$$g : [1,3] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto (x+2)^{1/2}.$$

g est continue et dérivable sur $[1,3]$, donc nous pouvons utiliser la proposition 1.

Nous avons : $\forall x \in [1,3],\ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$. La dérivée seconde est bornée sur $[1,3]$ et est majorée, en valeur absolue (remarque : la fonction dérivée soit positive, ce qui donne en plus la croissance de g) par $M = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(<1)$.

Nous obtenons donc, par la proposition, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_{n+1} - u_n \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(u_n - u_{n-1}\right)$.

i.e. : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_{n+1} - u_n \le \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n \left(u_1 - u_0\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$.

La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers une limite que nous noterons l.
La détermination de la limite se fait par l'égalité : $g(l) = l$, ce qui donne $l = 2$.

En fait, nous avons utilisé le fait que la fonction g était contractante.

IV CONCLUSION.