

EXPOSE 73 : FORMULES DE TAYLOR. APPLICATIONS.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Intégrale, intégration par parties – Théorème de Rolle – Règle de L'Hôpital.

I. INTRODUCTION.

Etant donné un polynôme P de degré n , une formule permet de calculer $P(b)$ quand la valeur de P et de ses n premières dérivées en a est connue. Si P est, non plus un polynôme de degré n , mais une fonction quelconque, ce résultat n'est plus exact. Nous avons toutefois une formule analogue, avec un terme supplémentaire, appelée formule de Taylor.

II. FORMULE DE TAYLOR RESTE INTEGRAL.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, où a et b sont des réels tels que $a < b$.

A) ENONCE.

Théorème 1 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I , où n est un entier naturel.

Alors :

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Démonstration :

Nous allons faire une démonstration par récurrence sur $n \geq 0$. Soit P_n , la proposition :

$$“ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. ”$$

Pour $n = 0$, la formule (2.1) se réduit à :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt.$$

Or la dérivée de f est continue, donc P_0 est vraie.

Soit $n \geq 0$. Supposons que P_n soit vraie, alors montrons que P_{n+1} est vraie. Pour cela, supposons que f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n+2$ sur I .

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) f^{(n+2)}(t) dt, \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans (2.1) le dernier terme par la valeur précédente, nous obtenons la récurrence au rang $n+1$ et P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, comme P_0 est vraie, nous avons pour tout $n \geq 0$:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad \square$$

Corollaire 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I , où n est un entier naturel. Alors : si $M = \sup_I |f^{(n+1)}|$:

$$\left| f(b) - \left[f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (2.2)$$

Démonstration :

Si $a \leq b$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt, \\ &\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M dt, \\ &\leq \frac{M}{n!} \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

De même, si $a \geq b$, il vient :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq M \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En appliquant la formule (2.1), le corollaire 2 est montré. $\square$

Corollaire 3 : formule de Maclaurin.

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle fermé d'extrémités 0 et x , en remplaçant dans (2.1) a par 0, et b par x , nous obtenons :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (2.3)$$

B) APPLICATION.

Taylor-Reste Intégral est pratique dans le sens où il est plutôt aisé de majorer (et/ou minorer) une intégrale.

Nous allons voir une démonstration de l'irrationalité de e .

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto e^x$$

et n un entier naturel, $n \geq 2$. f est de classe C^∞ sur $[0,1]$, donc satisfait les hypothèses du théorème. Soit $x \in [0,1]$. En appliquant la formule (2.3), nous avons :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Et pour $x = 1$: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$

Ainsi, nous obtenons la majoration suivante :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}.$$

Supposons e rationnel, i.e. : $e = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. En multipliant les trois membres de l'inégalité par $n!$, nous obtenons $\forall n \geq 2$:

$$\underbrace{n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)}_{u_n} < n! \frac{p}{q} < \underbrace{n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)}_{u_n} + \frac{n!}{n!}.$$

Or u_n est un entier et il en est de même pour $n! \frac{p}{q}$ à partir d'un certain rang, d'où :

$$u_n < n! \frac{p}{q} < u_n + 1. \text{ Contradiction.}$$

III. FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE.

A) ENONCE.

Théorème 4 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^n sur I , telle que la dérivée $(n+1)$ -ième de f existe sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad (3.1)$$

Démonstration :

Nous allons utiliser le théorème de Rolle appliqué à la fonction suivante :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et } A \text{ tel que } \varphi(a) = 0.$$

Nous avons bien : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et φ est de classe C^n sur $[a, b]$, C^{n+1} sur $]a, b[$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que nous avons la formule (3.1). $\square$

Remarques :

- Si $n = 0$, nous retrouvons le théorème des accroissements finis.
- La formule reste vraie si $a > b$.
- La formule de Taylor-Lagrange fournit un résultat sur le comportement global de la fonction.

Corollaire 5 : formule de Maclaurin.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^n sur I , telle que la dérivée $(n+1)$ -ième de f existe sur $]a, b[$ et supposons que $0 \in I$.

Alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Démonstration :

Il suffit de remplacer dans la formule (3.1) b par x , et a par 0 . Et dans ce cas, nous avons $\theta x \in]0, x[$. $\square$

B) APPLICATIONS.

1) Comparaison exponentielle/polynôme.

$\forall n \geq 1$, nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

En effet, soit $n \geq 1$, appliquons Taylor-lagrange à la fonction $f : [0 ; x] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$;

il vient : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ pour un certain $c \in]0, x[$ et $f^{(n+1)}(c) = e^c$.

Or $e^c \geq 1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = +\infty$, ce qui donne le résultat.

2) Autre exemple.

Si f est C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et avec M_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$ défini comme le sup de $|f^{(i)}|$, alors nous avons : $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

En effet, par Taylor-Lagrange, nous avons $f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2$ pour un certain $c \in]a, a+x[$, d'où $f'(a) = \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - \frac{1}{2}f''(c)x$, et donc $|f'(a)| \leq \frac{2M_0}{x} + \frac{M_2x}{2}$, minimal pour $x = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$.

IV. FORMULE DE TAYLOR-YOUNG.

A) ENONCE.

Théorème 6 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée n -ième en a . Alors :

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x-a)},$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_n(x-a) = 0$. (4.1)

Démonstration :

Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $Q_n : \quad "f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x-a), \quad \text{où}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_n(x-a) = 0."$

Pour $n = 1$, nous retrouvons la formule de la dérivée de f en a , i.e. :
 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = f'(a)$. Ainsi Q_0 est vraie.

Soit $n \geq 1$. Supposons que Q_n soit vraie, alors montrons que Q_{n+1} est vraie. Pour cela, supposons que f admet une dérivée $n+1$ -ième en a .

L'existence de la dérivée de f d'ordre $n+1$ en a , suppose l'existence d'un intervalle J sur lequel f est n fois dérivable.

Considérons les fonctions définies sur J : $\varphi : x \rightarrow f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$,

$$\text{et } \psi : x \rightarrow \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- $\varphi(a) = \psi(a) = 0$.

φ et ψ sont dérivables sur J .

Sur J , nous avons : $\varphi'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a)$, et $\psi'(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$.

- ψ' ne s'annule pas sur $J \setminus \{a\}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence à l'ordre n pour la fonction f' , nous obtenons :

$$f'(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) = (x-a)^n \tilde{\varepsilon}(x-a), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \tilde{\varepsilon}(x-a) = 0.$$

- Ce qui nous donne : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = 0.$

Nous sommes dans les conditions d'application de la règle de L'Hôpital et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

D'où nous déduisons l'existence de ε_{n+1} telle que :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + (x-a)^{n+1} \varepsilon_{n+1}(x-a),$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_{n+1}(x-a) = 0.$$

Q_{n+1} est ainsi démontrée.

Donc d'après le principe de récurrence, comme Q_0 est vraie, alors $\forall n \geq 1$, nous avons :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x-a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_n(x-a) = 0. \square$$

Remarque :

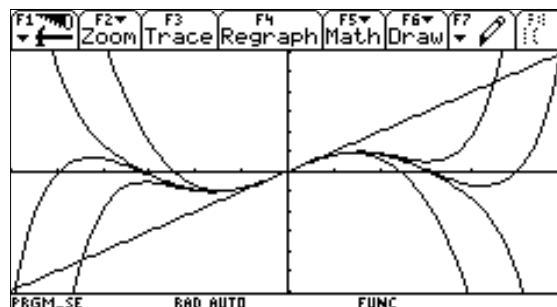
- La formule de Taylor-Young fournit un résultat local sur la fonction f .

B) APPLICATIONS.

1) Approximation successive.

Avec la calculatrice, nous faisons des approximations successives de $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 1, 3, 5, 7 et 9.

Cela donne :



2) Lien avec les développements limités.

Si f est de classe C^n en a , alors elle admet un développement limité d'ordre n en a .

La réciproque est fautive : contre-exemple :

$$f : x \rightarrow \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f a un développement limité d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

3) Allure d'un graphe au voisinage d'un point.

Soit f , une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et x_0 un point de I . Nous supposons que f est indéfiniment dérivable dans I , et que les nombres $f''(x_0), f'''(x_0) \dots$ ne sont pas tous nuls. Soit n le plus petit entier ≥ 2 tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (le plus souvent, $n = 2$). En appliquant la formule, nous obtenons :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n(h)] \text{ avec } \varepsilon_n(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Soit $M_0(x_0, f(x_0))$. L'équation de la tangente en $x_0 + h$ est $g(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$.

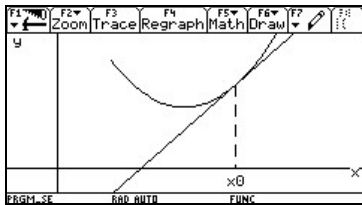
Nous avons donc :

$$f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n(h)] \text{ avec } \varepsilon_n(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

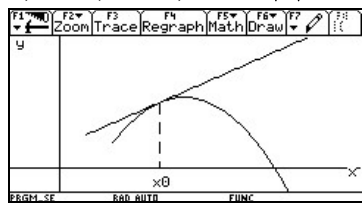
Ainsi pour h suffisamment petit, $f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$ est du signe de $h^n f^{(n)}(x_0)$.

Nous pouvons distinguer quatre cas :

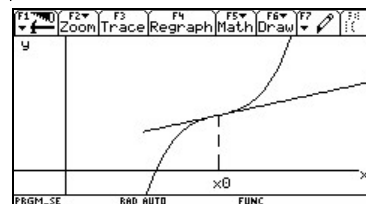
Cas 1 a : n pair, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Alors $f(x_0 + h) \geq g(x_0 + h)$ pour $|h|$ assez petit.



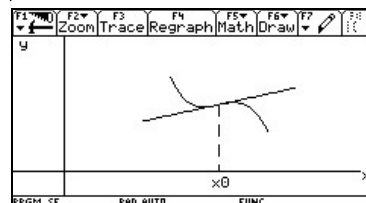
Cas 1 b : n pair, $f^{(n)}(x_0) < 0$. Alors $f(x_0 + h) \leq g(x_0 + h)$ pour $|h|$ assez petit.



Cas 2 a : n impair, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Alors $f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$ est du signe de h pour $|h|$ assez petit.



Cas 2 b : n impair, $f^{(n)}(x_0) < 0$. Alors $f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$ est du signe de $-h$ pour $|h|$ assez petit.



V. CONCLUSION.

Nous avons vu qu'il y avait trois formules de Taylor qui restent différentes quant à leurs hypothèses et à leurs applications. Cette notion permet d'étudier « localement » des fonctions ; elle s'utilise aussi dans le développement limité ou en théorie des séries entières.