Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

METHODES D'APPROXIMATION D'UNE SOLUTION D'UNE EQUATION NUMERIQUE REELLE. EXEMPLES. L'EXPOSE POURRA ETRE ILLUSTRE PAR UN OU DES EXEMPLES FAISANT APPEL A L'UTILISATION DE LA CALCULATRICE.

Niveau : Terminale S.

Pré-requis : Suites – Théorème des valeurs intermédiaires –

I INTRODUCTION.

Donnons-nous une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle que : $f(a)f(b)<0$. La continuité implique, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, l'existence de $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=0$. L'unicité de cette solution est donnée par la stricte monotonie de la fonction. Cependant, pour peu que la fonction se complique (ne serait-ce que $x^2-2=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$), il peut s'avérer difficile de trouver un tel x_0. L'objectif de cet exposé est de trouver des méthodes afin de déterminer une valeur approchée (voire exacte pour certaines équations) de la solution. Quatre méthodes seront ici données.

Dans la suite de l'exposé, nous pouvons supposer la fonction strictement croissante, quitte à considérer $-f$.

II DICHOTOMIE.

A) PRINCIPE DE LA METHODE.

Nous divisons l'intervalle $[a,b]$ en deux intervalles de même longueur par le point $c=\dfrac{a+b}{2}$. Il y a alors trois cas :

- Si $f(c)=0$, alors $x_0=c$,
- si $f(a)f(c)<0$, alors $a<x_0<c$,
- sinon $c<x_0<b$.

Si le premier point n'est pas vérifié, alors nous recommençons avec l'intervalle contenant la solution.

Si nous n'obtenons pas la valeur exacte de x_0, nous définissons alors deux suites telles que :

$a_0=a$ et $b_0=b$,

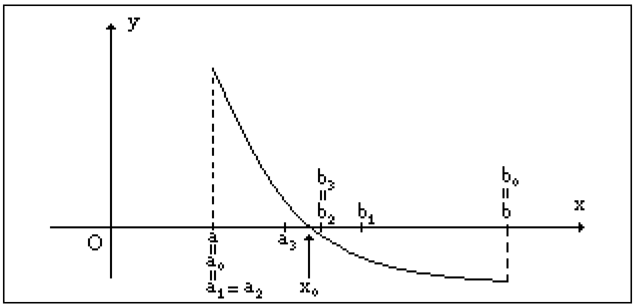
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ si } f(a_n) f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0, \\ \text{ou} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \text{ si } f(a_n) f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Proposition 1 :

> Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et ce sont des valeurs approchées (resp. par défaut et par excès) de x_0 à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Démonstration :

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition : P_n : « $a_n \le b_n$ ».



- P_0 est vraie par hypothèse ($a < b$).
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la proposition P_n vraie, alors montrons que P_{n+1} est vraie.

  Nous avons : $a_n \le \dfrac{a_n + b_n}{2} \le b_n$, d'où nous déduisons (dans tous les cas) $a_{n+1} \le b_{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.
- Ainsi, par le principe de récurrence, comme P_0 est vraie, alors, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le b_n$.

En fait, nous avons montré davantage : en effet, nous avons les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le b_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ dans tous les cas ; et par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui montre l'adjacence des deux suites.

De plus, par construction des deux suites, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < x_0 < b_n$. □

B) ALGORITHME.

La méthode ci-dessus nous permet de définir un algorithme. Le programme DICHO écrit sur T.I. Voyage200 fournit une valeur approchée de la racine x_0 appartenant à $[a,b]$ de l'équation $f(x) = 0$ avec une précision inférieure à ε.

Remarque 1 :

- Le programme est écrit ici pour avoir une meilleure présentation, mais pour un gain de temps préférer la fonction DICHO2 (qui ne donne qu'une valeur, sans savoir si c'est une valeur approchée par défaut ou par excès…).

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr


```
Dicho()
Prgm
Local b1,b2,b3,amp,f
Dialog
 Title "entrer la fonction"
 Request "f(x)= ",ff
 Request "borne inf",bi
 Request "borne sup",bs
 Request "amplitude",am
EndDlog

Expr(ff)→f(x)
approx(expr(bi))→b1
approx(expr(bs))→b2
expr(am)→amp
ClrIO

If f(b1)>Ø and f(b2)>Ø or f(b1)<Ø and f(b2)<Ø
then
 Disp "Pas de solution"
 Stop
EndIf

If f(b1)=Ø Then
 Disp "La solution est ",b1
 Stop
ElseIf f(b2)=Ø Then
 Disp "La solution est ",b1
 Stop
EndIf
While b2-b1>amp
 (b1+b2)/2→b3
 If f(b1)>Ø and f(b2)<Ø Then
  If f(b3)<Ø Then
   b3→b2
  ElseIf f(b3)>Ø Then
   b3→b1
  ElseIf f(b3)=Ø Then
   Disp "La solution est ",b3
   Stop
  EndIf
 Else If f(b2)>Ø and f(b1)<Ø Then
  If f(b3)<Ø Then
   b3→b1
  ElseIf f(b3)>Ø Then
   b3→b2
  ElseIf f(b3)=Ø Then
   Disp "La solution est ",b3
   Stop
  EndIf
 EndIf
EndWhile

Disp "L'encadrement est : ","[ "&string(min(
b1,b2))&" ; "&string(max(b1,b2))& " ]"

DelVar ff,bi,bs,am
EndPrgm
```

```
Dicho2(a,b,e)
Func
Local c
While (b-a)/2>e
(a+b)/2→c
 If f(c)=Ø
 Return approx(c)
 If f(a)*f(c)<Ø Then
  c→b
 Else
  c→a
 EndIf
EndWhile
approx(c)
EndFunc
```

C) EXEMPLE.

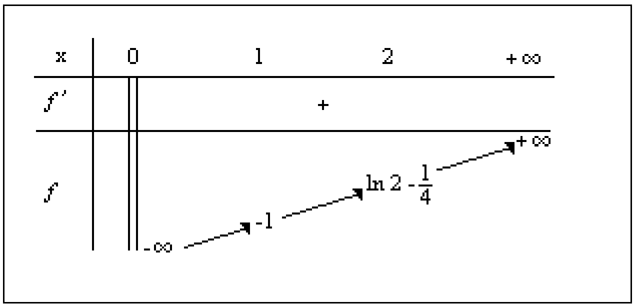
Soit la fonction :

$f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$

$$x \mapsto \ln(x)-\frac{1}{x^2}.$$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, nous avons : $f'(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3}$.

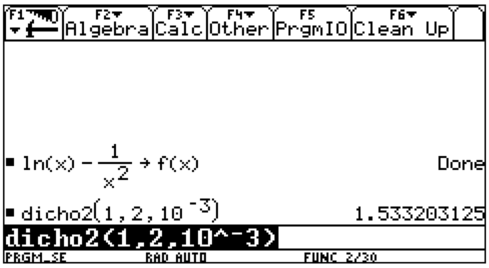
Nous obtenons alors le tableau de variation de la fonction f.

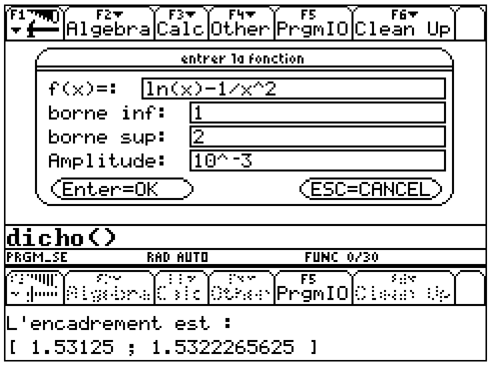


Nous avons : $\ln(2)-\dfrac{1}{4}>0$.

De plus, *f* étant continue, strictement croissante sur $[1,2]$ et $f(1)f(2)<0$, *f* s'annule une et une seule fois sur $[1,2]$.

Nous pouvons alors utiliser la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[1,2]$:





III METHODE D'ITERATION.

A) PRINCIPE DE LA METHODE.

Nous supposons dans ce chapitre que l'équation est mise sous la forme : $x=\varphi(x)$ avec φ définie, continue et dérivable sur $[a,b]$. De plus, nous supposons que $\varphi([a,b])\subset[a,b]$ et $\forall x\in[a,b], |\varphi'(x)|\leq k<1$.

Proposition 2 :

Sous ces conditions, l'équation $\varphi(x)=x$ admet une solution unique x_0 sur $[a,b]$ et la suite (i_n) définie par $\begin{cases} i_0\in[a,b], \\ i_{n+1}=\varphi(i_n), \end{cases}$ converge vers x_0. Nous avons de plus $\forall n\in\mathbb{N}, |i_n-x_0|\leq k^n|b-a|$.

Démonstration :

La fonction ψ définie sur $[a,b]$ par $\psi: x\mapsto\varphi(x)-x$ est continue, dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée : $\psi': x\mapsto\varphi'(x)-1$.

Or $\forall x\in[a,b], |\varphi'(x)|\leq k<1$, donc $\psi'<0$ sur $[a,b]$ et ψ est strictement décroissante. De plus, $\psi(a)=\varphi(a)-a\geq 0$ et $\psi(b)=\varphi(b)-b\leq 0$ car $\varphi([a,b])\subset[a,b]$.

ψ s'annule donc une et une seule fois sur $[a,b]$.

Soit $x_0\in[a,b]$ tel que : $\psi(x_0)=0$, *i.e.* : $\varphi(x_0)=x_0$.

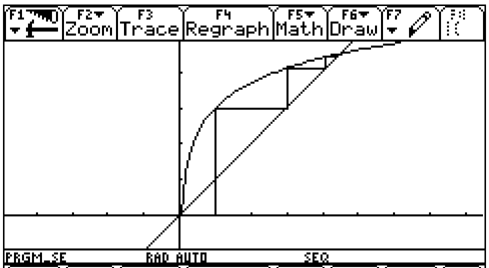
Soit $n\in\mathbb{N}$, par l'inégalité des accroissements finis, $|i_{n+1}-x_0|=|\varphi(i_{n+1})-\varphi(x_0)|\leq k|i_n-x_0|$, et par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, nous obtenons : $|i_n-x_0|\leq k^n|i_0-x_0|\leq k^n|b-a|$.

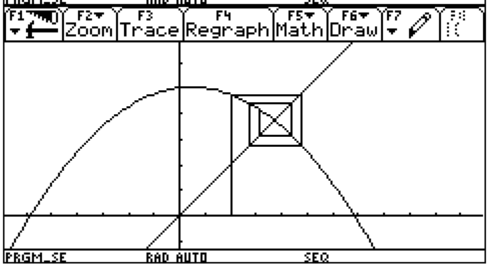
Et par hypothèse, $0<k<1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}i_n=x_0$. □

En pratique, deux cas peuvent se présenter :

- Si φ est croissante, la suite (i_n) est monotone.

- Si φ est décroissante, les deux suites extraites (i_{2n}) et (i_{2n+1}) sont adjacentes, et dans ce cas, pour tout n, i_{2n} et i_{2n+1} fournissent un encadrement de x_0.





B) EXEMPLE.

Reprenons notre fonction : $f : x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{x^2}$ et nous prenons $[a,b] = [1,2]$.

Remarque 2 (préliminaire) :

- En pratique, il est assez rare d'avoir $0 < k < 1$. Par conséquent, il suffit de transformer notre équation de départ, en la multipliant, par exemple par une constante comme c'est le cas ici. Il est possible aussi de changer l'intervalle $[a,b]$ en le prenant plus petit.

Posons : $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{1}{4}\left(\ln(x) - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Résoudre $\varphi(x) = x$ est équivalent à résoudre $f(x) = 0$ (sur $[1,2]$). φ est définie, continue et dérivable deux fois sur $[1,2]$.

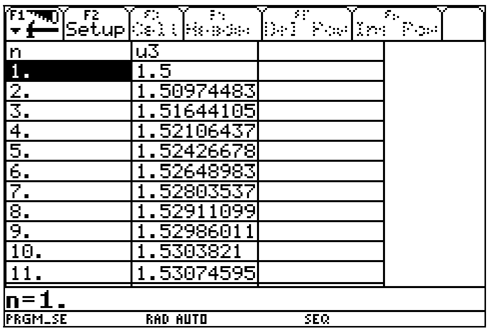
Soit $x \in [1,2]$, $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2+2}{x^3}\right)$ et $\varphi''(x) = \dfrac{x^2+6}{4x^4} > 0$.

x	1	2
φ''	+	
φ'	$\frac{1}{4}$ $\nearrow$	$\frac{13}{16}$
φ	$\frac{5}{4}$ $\nearrow$	$\frac{33}{16} - \frac{\ln 2}{4} (< 2)$

Nous avons donc le tableau de variation ci-contre.

Nous avons bien $\varphi([1,2]) \subset [1,2]$ et $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{13}{16} < 1$ sur $[1,2]$.

La méthode d'itération peut s'appliquer. Prenons (par exemple) $x_0 = 1.5$. Dans ce cas, comme le montre l'écran ci-dessous, 10 itérations permettent d'avoir une erreur à 10^{-3} près par défaut. Cependant, théoriquement, il faudrait $n \geq 34$…



n	u3
1.	1.5
2.	1.50974483
3.	1.51644105
4.	1.52106437
5.	1.52426678
6.	1.52648983
7.	1.52803537
8.	1.52911099
9.	1.52986011
10.	1.5303821
11.	1.53074595

n=1.

PRGM_SE RAD AUTO SEQ

IV METHODES DE LA CORDE ET DE NEWTON.

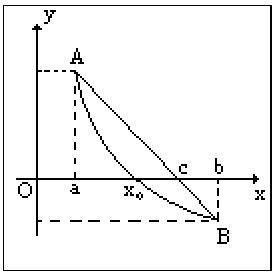
Nous supposerons, dans cette partie, que f est continue, et deux fois dérivable sur $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$, et f' et f'' ont un signe constant sur $[a,b]$.

A) METHODE DE LA CORDE.

1) PRINCIPE DE LA METHODE.

Principe 1 :

Si $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$, alors l'abscisse c du point d'intersection de la corde AB et de l'axe Ox est une valeur approchée de x_0.

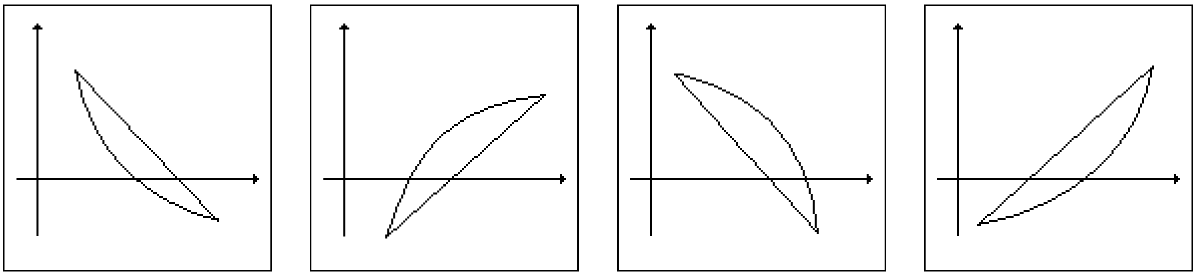


En effet, écrivons l'équation de la droite AB : $y=f(a)+(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

D'où $0=f(a)+(c-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, *i.e.* : $c=\dfrac{a\,f(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}$.

2) SENS DE L'ERREUR.

f' et f'' ayant un signe constant sur $[a,b]$, nous sommes dans l'une des quatre situations suivantes :



$f'<0, f''>0$ | $f'>0, f''<0$ | $f'<0, f''<0$ | $f'>0, f''>0$

Par conséquent, si $f'f''<0$ la valeur approchée obtenue est une valeur approchée par excès, et si $f'f''>0$, c'est une valeur approchée par défaut.

3) ITERATION DE LA METHODE.

La méthode de la corde donne pour encadrement : $a<x_0<c$ si $f'f''<0$ (resp. $c<x_0<b$ si $f'f''>0$).

Il est possible d'appliquer à nouveau la méthode de la corde sur l'intervalle $[a,c]$ (resp. $[c,b]$). Nous construisons ainsi une suite de valeurs approchées (c_n) par excès (resp.

par défaut) de x_0. La suite (c_n) est définie par : $c_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \dfrac{a\,f(c_n) - c_n\,f(a)}{f(c_n) - f(a)}$

(resp. $c_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \dfrac{c_n\,f(b) - b\,f(c_n)}{f(b) - f(c_n)}$).

Proposition 3 :

La suite (c_n) ainsi définie est une suite monotone de $[a,b]$ qui converge vers x_0.

Si nous notons $m_1 = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$ et $M_1 = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons $|c_n - x_0| \le \left(\dfrac{2M_1}{m_1} |c_0 - x_0| \right)^n$. Si $k = \dfrac{2M_1}{m_1}|c_0 - x_0| < 1$, alors nous avons une convergence linéaire.

Démonstration :

Plaçons-nous dans le cas : $f'' > 0, f' < 0$, donc f est décroissante et $f(a) > 0$.

Soit la fonction définie sur $[a,b]$ par $g : x \mapsto \dfrac{a\,f(x) - x\,f(a)}{f(x) - f(a)}$. g est définie, continue et dérivable sur $[a,b]$. Soit $x \in [a,b]$, $g'(x) = \dfrac{f(a)\left[f(a) - f(x) + (x-a)f'(x)\right]}{\left(f(x) - f(a)\right)^2}$.

Soit la fonction définie sur $[a,b]$ par $h : x \mapsto f(a) - f(x) + (x-a)f'(x)$. h est définie, continue et dérivable sur $[a,b]$. Soit $x \in [a,b]$, $h'(x) = (x-a)f''(x) > 0$ donc h est croissante et minorée par $h(a) = 0$, et ainsi, h est positive.

Nous avons alors : $g' \ge 0$ donc g est croissante. De plus, nous avons $g(a) = a$ et $g(b) = c_1 = \dfrac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)} \le b$ car $a \le b$. Ainsi, $g([a,b]) \subset [a,b]$.

En outre, la monotonie de la suite (c_n) est héritée de la croissance de la fonction g. Et comme $c_1 \le b = c_0$, nous en déduisons que la suite est décroissante. Cette suite est minorée par a (et même par x_0) ; elle est donc convergente et converge vers l'unique point fixe de g sur $[a,b]$, qui se trouve être x_0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$c_{n+1} - x_0 = \frac{a\,f(c_n) - c_n\,f(a)}{f(c_n) - f(a)} - x_0 = \frac{f(c_n)(a - x_0) - f(a)(c_n - x_0)}{f(c_n) - f(a)}.$$

De plus, nous pouvons appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

Soit $\alpha_n \in]a, c_n[$, tel que $f(x_0) = 0 = f(a) + (x_0 - a)f'(\alpha_n)$ et soit $\beta_n \in]a, c_n[$, tel que $f(x_0) = 0 = f(c_n) + (x_0 - c_n)f'(\beta_n)$.

Nous obtenons alors : $c_{n+1} - x_0 = \dfrac{f'(\beta_n)(c_n - x_0)(a - x_0) - f'(\alpha_n)(a - x_0)(c_n - x_0)}{(x_0 - c_n)f'(\beta_n) - (x_0 - a)f'(\alpha_n)}$.

etiennesy@wanadoo.fr

D'où $c_{n+1}-x_0=\left(c_n-x_0\right)\dfrac{\left(a-x_0\right)\left(f'\left(\beta_n\right)-f'\left(\alpha_n\right)\right)}{\left(x_0-c_n\right)f'\left(\beta_n\right)-\left(x_0-a\right)f'\left(\alpha_n\right)}$.

Soit $m_1=\inf\limits_{[a,b]}\left|f'\right|$ et $M_1=\sup\limits_{[a,b]}\left|f'\right|$, alors : $\left|\dfrac{\left(a-x_0\right)\left(f'\left(\beta_n\right)-f'\left(\alpha_n\right)\right)}{\left(x_0-c_n\right)f'\left(\beta_n\right)-\left(x_0-a\right)f'\left(\alpha_n\right)}\right|\leq\dfrac{\left|a-x_0\right|2M_1}{m_1\left|c_n-a\right|}$ (nous utilisons pour cette inégalité le fait que f' est de signe constant pour le dénominateur, ainsi qu'une inégalité triangulaire pour le numérateur). De plus, nous avons les inégalités : $x_0\leq c_n\leq b$, donc $\left|c_n-a\right|\leq\left|x_0-a\right|$.

Nous obtenons alors : $\left|c_{n+1}-x_0\right|=\dfrac{2M_1}{m_1}\left|c_n-x_0\right|$, et par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, nous obtenons : $\left|c_n-x_0\right|\leq\left(\dfrac{2M_1}{m_1}\left|c_0-x_0\right|\right)^n$. □

Remarque 2 :

- La convergence est locale. Dans la pratique, nous essayons d'avoir un encadrement suffisamment proche de x_0 afin d'avoir $k<1$. Ce dernier encadrement peut être trouvé par la méthode de dichotomie qui est globalement convergente.

4) EXEMPLE.

Reprenons l'exemple précédent : $f:x\mapsto\ln\left(x\right)-\dfrac{1}{x^2}$ étudiée sur $\left[a,b\right]=\left[1,2\right]$.

Soit $x\in\left[1,2\right]$, nous avons : $f''\left(x\right)=-\dfrac{x^2+6}{x^4}$.

La méthode de dichotomie permet de réduire l'intervalle de recherche à $\left[1.5,1.6\right]$. Avec cet intervalle, nous avons : $k=\dfrac{2M_1}{m_1}\left|c_0-x_0\right|\leq\dfrac{4}{5}<1$. La méthode précédente peut s'appliquer.

Nous avons $f'>0,f''<0$ sur $\left[1,2\right]$, donc à *fortiori* sur $\left[1.5,1.6\right]$.

Nous obtenons le tableau ci-contre.

Comme $f'f''<0$, nous obtiendrons une valeur approchée de x_0 par excès.

n	u4
1.	1.6
2.	1.5329334288
3.	1.5316112055
4.	1.5315849266
5.	1.5315844043
6.	1.5315843939
7.	1.5315843937
8.	1.5315843937

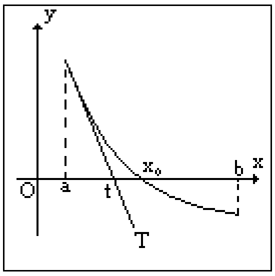
n=1.

B) METHODE DE NEWTON.

1) PRINCIPE DE LA METHODE.

Principe 2 :

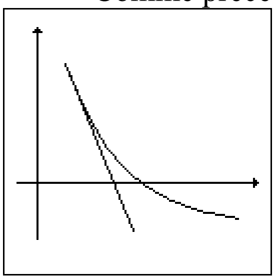
Si $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, alors l'abscisse t du point d'intersection de la tangente en A (resp. B) au graphe de f et de l'axe Ox est une valeur approchée de x_0.

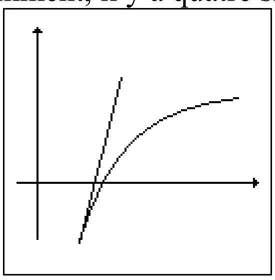


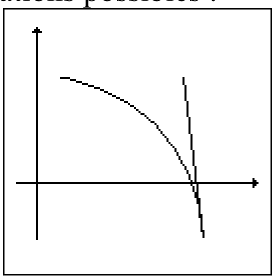
Ecrivons l'équation de la tangente en A (resp. en B) : $y = f(a) + (x-a) f'(a)$ (resp. $y = f(b) + (x-b) f'(b)$) d'où $t = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ (resp. $t = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$).

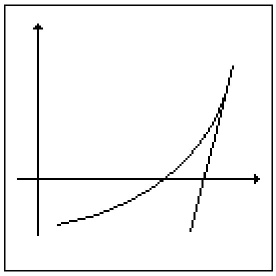
2) SENS DE L'ERREUR.

Comme précédemment, il y a quatre situations possibles :


$f'' > 0, f(a) > 0$


$f(a) < 0, f'' < 0$


$f(a) > 0, f'' < 0$


$f(a) < 0, f'' > 0$

Par conséquent la méthode de Newton s'applique à l'extrémité où f' et f'' sont de même signe : $\begin{cases} \text{Soit } A \text{ si } f(a) f''(a) > 0, \text{ et dans ce cas } t < x_0, \\ \text{Soit } B \text{ si } f(b) f''(b) > 0, \text{ et dans ce cas } t > x_0. \end{cases}$

3) ITERATION DE LA METHODE.

Comme précédemment, il est possible d'appliquer à nouveau la méthode sur l'intervalle $[a,t]$ (resp. $[t,b]$). Nous construisons ainsi une suite (t_n) de valeurs approchées par défaut (resp. par excès) de x_0. La suite (t_n) est définie par : $t_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n - \dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)}$ (resp. $t_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n - \dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)}$).

Proposition 4 :

La suite (t_n) ainsi définie est une suite monotone de $[a,b]$ qui converge vers x_0.

Si nous notons $m_1 = \inf_{[a,b]} |f'|$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons $|t_n - x_0| \leq \frac{2m_1}{M_2} \tilde{k}^{2^n}$ avec $\tilde{k} = \frac{M_2}{2m_1} |t_0 - x_0|$. Si $\tilde{k} < 1$, alors nous avons une convergence quadratique.

Démonstration :

Plaçons-nous dans le cas : $f'' > 0, f(a) > 0$, donc f est décroissante.

Soit la fonction définie sur $[a,b]$ par $g : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. g est définie, continue et dérivable sur $[a,b]$. Soit $x \in [a,b]$, $g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$. g' est donc du signe de f ; g sera croissante sur $[a, x_0]$, puis décroissante sur $[x_0, b]$. Or les éléments à considérer sont par hypothèses les éléments de $[a, x_0]$.

Donc, nous avons $g(a) \geq a$ car $\frac{f(a)}{f'(a)} < 0$ et $g(x_0) = x_0 \leq b$, et $g([a, x_0]) \subset [a,b]$.

En outre, la monotonie de la suite (c_n) est héritée de la croissance de la fonction g sur $[a, x_0]$. Et comme $t_1 = g(a) \geq a = t_0$, nous en déduisons que la suite est croissante. Cette suite est majorée par x_0 ; elle est donc convergente et converge vers l'unique point fixe de g sur $[a,b]$, qui se trouve être x_0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : soit $\gamma_n \in]a, t_n[$ tel que $f(x_0) = 0 = f(t_n) + (x_0 - t_n) f'(t_n) + \frac{(x_0 - t_n)^2}{2} f''(\gamma_n)$.

Ainsi, $t_{n+1} - x_0 = t_n - x_0 + \frac{(x_0 - t_n) f'(t_n) + \frac{(x_0 - t_n)^2}{2} f''(\gamma_n)}{f'(t_n)}$.

D'où $t_{n+1} - x_0 = \frac{(x_0 - t_n)^2}{2} \frac{f''(\gamma_n)}{f'(t_n)}$.

Soit $m_1 = \inf_{[a,b]} |f'|$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, alors $|t_{n+1} - x_0| \leq \frac{(x_0 - t_n)^2}{2} \frac{M_2}{m_1} = \frac{2m_1}{M_2} \left[\frac{M_2}{2m_1} |t_n - x_0| \right]^2$

et par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, il vient : $|t_n - x_0| \leq \frac{2m_1}{M_2} \left[\frac{M_2}{2m_1} |t_0 - x_0| \right]^{2^n}$. □

Remarque 3 :

- De même que précédemment, la convergence est locale. Dans la pratique, nous essayons d'avoir un encadrement suffisamment proche de x_0 afin d'avoir $\tilde{k} < 1$. Ce dernier encadrement peut être trouvé par la méthode de dichotomie qui est globalement convergente.

etiennesy@wanadoo.fr

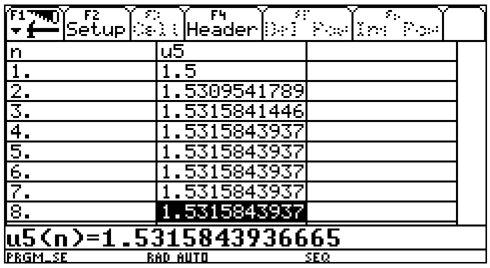
4) EXEMPLE.

Reprenons notre exemple : $f : x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{x^2}$ étudiée sur $[a,b]=[1,2]$.

La méthode de dichotomie permet de réduire l'intervalle de recherche à $[1.5,1.6]$. Avec cet intervalle, nous avons : $\tilde{k} = \dfrac{M_2}{2m_1}|t_0 - x_0| \le \dfrac{7}{15} < 1$. La méthode précédente peut s'appliquer.

Nous avons $f(1.5)f''(1.5) \ge 0.06 > 0$, nous allons donc utiliser la méthode de Newton en 1.5.

Les différentes valeurs trouvées sont des valeurs approchées par défaut et cette méthode converge très rapidement dès que t_0 proche de x_0 (3 itérations et nous avons un résultat approché de x_0 à moins de 10^{-12} près !).



n	u5
1.	1.5
2.	1.5309541789
3.	1.5315841446
4.	1.5315843937
5.	1.5315843937
6.	1.5315843937
7.	1.5315843937
8.	1.5315843937

u5(n)=1.5315843936665

Remarques 4 :

- La méthode de la corde ne marche pas sur toutes les fonctions (prendre la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ sur un intervalle non symétrique proche de 0). En effet, dès qu'il y a un point d'inflexion, pour peu que l'intervalle ne soit pas symétrique par rapport à x_0, il arrive un moment où l'intervalle considéré pour itérer la méthode ne contienne plus x_0. Cela tient au fait que nous fixons le point a ou b ; d'autres algorithmes permettent de passer outre ce problème, mais dans ce cas le paragraphe suivant n'a pas d'utilité !
- En revanche, la méthode de Newton marche pour toutes fonctions (qui sont dérivables et telles que $f'(x_0) \ne 0$). De plus, pour notre exemple, par raison de convexité, la méthode sera convergente même pour l'intervalle $[1,2]$.

C) APPLICATION SIMULTANEE DES DEUX METHODES.

Les deux études précédentes prouvent que quatre situations sont possibles et que dans chacune d'elles, les valeurs approchées de x_0 obtenues par la méthode de la corde et par la méthode de Newton fournissent un encadrement de x_0 ($c < x_0 < t$ ou $t < x_0 < c$ suivant les cas).

Il peut donc être intéressant d'appliquer simultanément les deux méthodes et de les itérer afin d'avoir un encadrement de la solution.

Le programme suivant, écrit sur T.I. Voyage200, fournit un encadrement $[a,b]$ de la racine x_0 de l'équation $f(x)=0$, d'amplitude inférieure à ε.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr


```
Cord_new()
Prgm
Local b1,b2,amp,f,c,t
Dialog
 Title "entrer la fonction"
 Request "f(x)= ",ff
 Request "borne inf",bi
 Request "borne sup",bs
 Request "amplitude",am
EndDlog

Expr(ff)→f(x)
approx(expr(bi))→b1
approx(expr(bs))→b2
expr(am)→amp
d(f(x),x)→gg(x)
d(gg(x),x)→hh(x)
ClrIO

If f(b1)>Ø and f(b2)>Ø or f(b1)<Ø and f(b2)<Ø
then
 Disp "Pas de solution"
 Stop
EndIf
```

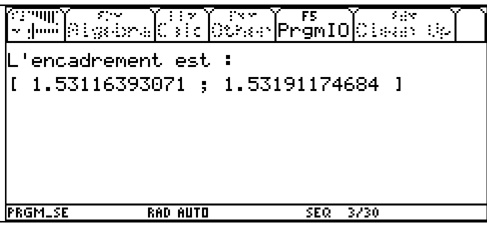
```
If f(b1)=Ø Then
 Disp "La solution est ",b1
 Stop
ElseIf f(b2)=Ø Then
 Disp "La solution est ",b1
 Stop
EndIf

While b2-b1>amp
 (b1*f(b2)-b2*f(b1))/(f(b2)-f(b1))→c
 If f(b1)*hh(b1)>Ø then
  b1-f(b1)/gg(b1)→t
 Else
  b2-f(b2)/gg(b2)→t
 EndIf
 min(c,t)→b1
max(c,t)→b2
EndWhile

Disp "L'encadrement est : ","[ "&string(min(
b1,b2))&" ; "&string(max(b1,b2))& " ]"

DelVar ff,bi,bs,am,gg,hh
EndPrgm
```

Avec l'exemple précédent : $f: x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{x^2}$ étudiée sur $[1,2]$, nous obtenons avec : $\varepsilon = 10^{-3}$.



V CONCLUSION.

Nous avons vu qu'il existe différentes façons d'approximer une solution d'une équation et que ces différentes méthodes permettent d'obtenir des valeurs approchées, voire des encadrements (ce qui est préférable !). Il est à noter que la méthode de Newton converge d'autant plus rapidement que l'extrémité d'où part la tangente est proche de la solution et que cette convergence est rapide.