Sylvain ETIENNE
PLC1, groupe 1
etiennesy@wanadoo.fr

IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE, IMAGE D'UN SEGMENT. CONTINUITE DE LA FONCTION RECIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : continuité – injection – bijection – composition – fonctions usuelles – propriétés de $\mathbb{R}$ - bornes supérieures – propriétés des suites – théorème de Bolzano-Weierstrass.

I INTRODUCTION.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Nous rappelons que l'image de I par f, noté $f(I)$, est l'ensemble de tous les réels $f(x)$ avec $x \in I$. L'objectif de cet exposé est de trouver une (ou des) condition(s) nécessaire et suffisante afin que la fonction $f : I \to f(I)$ soit une bijection. C'est ce que nous établirons dans un premier temps. Puis, nous nous demanderons quelles particularités possèdent la fonction réciproque d'une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle.

II IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE.

A) DEFINITION.

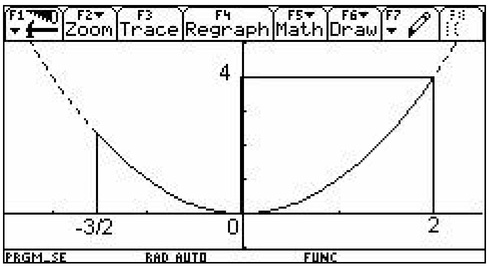
Définition :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, $\forall (a,b) \in I \times I$, c est compris entre a et b, alors $c \in I$.

B) EXEMPLES.

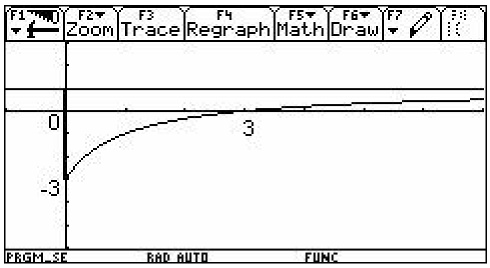
f est la fonction $x \mapsto x^2$ et $I = \left]-\frac{3}{2}, 2\right]$.

Sur le dessin ci-dessous, nous lisons : $f(I) = [0,4]$.



f est la fonction $x \mapsto \dfrac{x-3}{x+1}$ et $I =]0, +\infty[$.

Sur le dessin ci-dessous, nous lisons : $f(I) =]-3,1[$.



Dans chacun des cas ci-dessus, $f(I)$ est aussi un intervalle ; cela tient au fait que *f* est continue sur *I*.

C) THEOREME.

Théorème 1 (théorème des valeurs intermédiaires) :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration :

Nous allons faire une preuve par dichotomie.

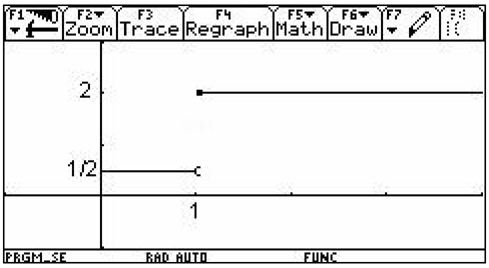
Soit $a, b \in I$ et d tels que $f(a) \leq d \leq f(b)$. Il s'agit de montrer l'existence d'un $c \in I$ tel que $f(c) = d$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $a \leq b$. Initialisons notre suite par : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Puis, $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq d$, alors $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, sinon, nous posons : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Ainsi les suites (a_n) et (b_n) vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (a_n) \text{ croît et } (b_n) \text{ décroît,} \\ \forall n,\ f(a_n) \leq d \leq f(b_n), \\ \forall n,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}. \end{cases} \qquad (1)$$

Ces suites sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune *l*. La continuité de la fonction *f* nous permet de passer à la limite dans (1), et ainsi d'avoir $d = f(l)$. □

Remarques :

- L'hypothèse de continuité est indispensable.
  Pour la fonction *f* représentée ci-contre, l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ est la paire $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ qui n'est pas un intervalle. Mais *f* n'est pas continue en 1.



- L'hypothèse que I est un intervalle est, elle aussi, indispensable. Si I n'est pas un intervalle et même si *f* est continue en tout point de *I*, l'image $f(I)$ peut ne pas être un intervalle.
- Le théorème n'énonce qu'une condition suffisante. En effet, l'image d'un intervalle *I* par une fonction non continue sur *I*, peut être un intervalle.
- $f(I)$ peut être réduit à un point. Par exemple, si *f* est la fonction constante $x \mapsto a$ et $I = \mathbb{R}$ alors $f(I) = \{a\}$.

III IMAGE D'UN SEGMENT.

Rappels :

- Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass :

  Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins une valeur d'adhérence ; *id est* : il est possible d'extraire une sous-suite convergente de toute suite bornée de $\mathbb{R}$.

Théorème 2 :

Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, alors f est borné et atteint ses bornes.

Démonstration :

- Faisons une démonstration par l'absurde : supposons f non bornée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(u_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $|f(u_n)| \geq n$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass montre l'existence d'une sous-suite $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l dans $[a,b]$. Par continuité, nous obtenons $\lim_{k\to+\infty} f\left(u_{n_k}\right) = f(l)$, ce qui est impossible.
- Montrons à présent que f atteint ses bornes. Soit $M = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$. Il existe alors une suite $(u_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = M$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une sous-suite $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l dans $[a,b]$. Ainsi nous avons par continuité $\lim_{k\to+\infty} f\left(u_{n_k}\right) = f(l) = M$. Nous en déduisons donc $M \in [a,b]$. Il en est de même pour la borne inférieure. □

Corollaire 1 :

Si f est continue sur un segment I, alors $f(I)$ est un segment.

Démonstration :

C'est une conséquence directe des théorèmes 1 et 2.

IV FONCTIONS RECIPROQUES.

Proposition 1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration :

$(\Leftarrow)$ Si f est strictement croissante, alors pour tout $(a,b) \in I \times I$; $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$, et à *fortiori* l'implication $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ est vraie.

$(\Rightarrow)$ Supposons f injective.

L'ensemble $E=\{(x,y)\in I\times I / x<y\}$ est connexe, et l'application $\varphi : x,y\mapsto f(x)-f(y)$ est continue et ne s'annule pas jamais sur $I\times I$. La partie $\varphi(E)$ sera donc un connexe de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0. Cela montre que $\varphi(E)\subset\mathbb{R}_+^*$ ou $\varphi(E)\subset\mathbb{R}_-^*$.

Théorème 3 :

> Soit *f* une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle *I*.
>
> *f* est une bijection de *I* sur $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Démonstration :

Par le théorème 1 et la proposition 1, nous avons : *f* est une bijection de *I* dans $f(I)$.

Supposons que *f* soit croissante. Posons $J=f(I)$.

- Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Si $(y_1,y_2)\in J\times J$ et $y_1<y_2$, si nous posons $x_1=f^{-1}(y_1)$ et $x_2=f^{-1}(y_2)$, alors $x_1<x_2$ (sinon la stricte croissance de *f* entraîne $y_1>y_2$, ce qui est absurde).

- Montrons à présent que f^{-1} est continue en un point $y_0\in J$.

Soit a et b (avec $a<b$) les bornes de I (finies ou infinies) et posons $f^{-1}(y_0)=x_0$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Nous avons deux cas :

- Si $x_0\in\,]a,b[$, le réel $\varepsilon_1=\inf\{b-x_0;x_0-a;\varepsilon\}$ est strictement positif et vérifie $]x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1[\,\subset I$. Comme *f* est croissante,
  $x_0\in\,]x_0-\varepsilon_1;x_0+\varepsilon_1[\,\subset I\Rightarrow y_0\in\,]f(x_0-\varepsilon_1);f(x_0+\varepsilon_1)[\,\subset J$.
  Soit $\eta=\inf\{y_0-f(x_0-\varepsilon_1);f(x_0+\varepsilon_1)-y_0\}$. Alors
  $]y_0-\eta,y_0+\eta[\,\subset\,]f(x_0-\varepsilon_1),f(x_0+\varepsilon_1)[\,\subset J$,
  et la croissance de f^{-1} entraîne :
  $f^{-1}(]y_0-\eta,y_0+\eta[)\subset\,]x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1[\,\subset\,]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$, ce qui prouve la continuité de f^{-1} en y_0.
- Si x_0 est une borne de *I*, il faut raisonner de façon identique mais avec des intervalles semi-ouverts et en notant que y_0 est l'une des bornes de *J*. □

V APPLICATIONS.

A) RACINE.

Le théorème 2 nous donne en particulier : si une fonction *f* est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)\cdot f(b)<0$, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.

Exemple :

Soit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [-1,5] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \end{aligned}$$

Nous avons : f est continue sur $[-1,5]$ et $f(-1)\cdot f(5) = -576 < 0$. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]-1,5[$.

B) GRAPHE.

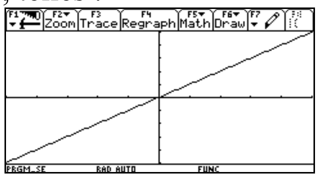
Il n'est pas toujours évident de déterminer la fonction réciproque d'une fonction, même si c'est une fonction continue strictement monotone.

Cependant, dans un repère normé, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

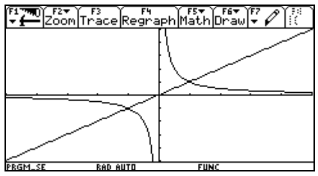
Exemples :

Quelques fonctions réciproques sont vues au lycées, telles :

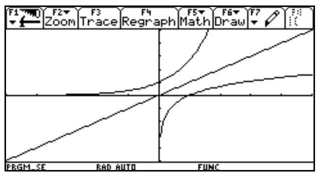
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et sa fonction réciproque est f.
$x \mapsto x.$



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et sa fonction réciproque est g.
$x \mapsto 1/x.$

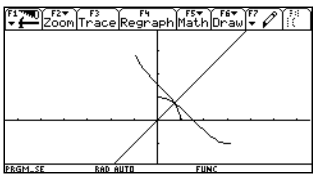


Nous avons aussi la fonction exponentielle qui admet pour fonction réciproque la fonction logarithme népérien.

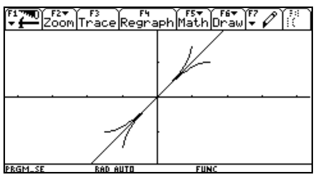


Cependant, nous pouvons définir d'autres fonctions, dites fonctions hyperboliques, qui sont les fonctions réciproques de cosinus, sinus et tangentes :

$c : [0,\pi] \to [-1,1]$, et $c^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$,
$x \mapsto \cos(x)$ $\qquad$ $x \mapsto \arccos(x).$

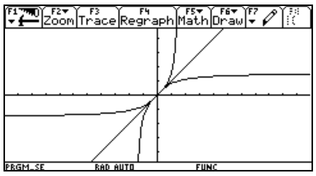


$s : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, et $s^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$x \mapsto \sin(x)$ $\qquad$ $x \mapsto \arcsin(x).$



Sylvain ETIENNE
PLC1, groupe 1
etiennesy@wanadoo.fr

$$t : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty, +\infty\right[, \quad \text{et} \quad t^{-1} : \left]-\infty, +\infty\right[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$
$$x \mapsto \tan(x) \qquad\qquad x \mapsto \arctan(x).$$



VI CONCLUSION.

En conclusion, nous avons vu que l'image d'un intervalle par une fonction continue donne un intervalle, celle d'un segment un segment. De plus, nous avons caractérisé la continuité de la fonction réciproque *via* la fonction initiale. Il reste à étudier le cas de la dérivabilité.