Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

ETUDE DES SUITES DE TERME GENERAL a^n, n^b ET $n!$. CROISSANCES COMPAREES. EXEMPLES DE COMPARAISON AUX SUITES PRECEDENTES. L'EXPOSE POURRA ETRE ILLUSTRE PAR UN OU DES EXEMPLES FAISANT APPEL A L'UTILISATION DE LA CALCULATRICE.

Niveau : Terminale S (bonne classe).

Pré-requis : Notion de suites réelles – Comportement de suites réelles – Fonction puissance – Fonction exponentielle et logarithme – Factorielle d'un entier naturel –

I INTRODUCTION.

L'étude des suites commencent à partir de la première, puis est approfondie en terminale. Cet exposé a pour objectif d'analyser trois suites, qui deviendront des suites de référence, notamment en terme de vitesse de convergence. Le plan choisi ici sera le plan du titre de la leçon.

II ETUDE DES SUITES.

A) SUITE PUISSANCE.

Proposition 1 : suite $\left(n^b\right)$, $b \in \mathbb{R}$.

-*i*- Si $b = 0$, alors la suite $\left(n^b\right)$ est stationnaire et vaut 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

-*ii*- Si $b > 0$, la suite est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^b = +\infty$.

-*iii*- Si $b < 0$, la suite est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^b = 0$.

Démonstration :

-*i*- Ce point est trivial avec la convention $0^0 = 1$.

-*ii*- et -*iii*- Soit $b \in \mathbb{R}^*$, nous avons $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln\left(n^b\right) = b\ln(n)$. D'où la monotonie de la suite et sa convergence. □

B) SUITE GEOMETRIQUE.

Proposition 2 : suite $\left(a^n\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

-*i*- Si $a > 1$, la suite a^n est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

-*ii*- Si $a = 1$, la suite est stationnaire et vaut 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

-*iii*- Si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ et la suite est décroissante si $0 \le a < 1$.

-*iv*- Si $a=-1$, la suite est divergente et prend la valeur 1 si n est pair et -1 si n est impair.
-*v*- Si $a<-1$, la suite est divergente et tend vers $+\infty$ si n est pair et vers $-\infty$ si n est impair.

Démonstration :
-*i*- De $a>1$, nous en déduisons : $\forall n\in\mathbb{N}, a^{n+1}>a^n$, d'où la croissance de la suite. De plus, soit $n\in\mathbb{N}$, $\ln a^n = n\ln a$. Comme $a>1$, nous avons $\ln a>0$. Ainsi, la suite tend bien vers $+\infty$.
-*ii*- et -*iv*- sont triviaux.
-*iii*- Si $0\le a<1$, nous avons : $\forall n\in\mathbb{N}, a^{n+1}\le a^n$ et la suite est décroissante. Si $0<|a|<1$, posons $\forall n\in\mathbb{N}, b^n=\dfrac{1}{|a^n|}$. (b^n) satisfait les hypothèses du -*i*- et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n=+\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$. Le cas $a=0$ est trivial.
-*v*- Soit $a<-1$, comme $(|a^n|)=(|a|^n)$ satisfait les hypothèses du -*i*-, donc la suite (a^n) est divergente. Soit $n\in\mathbb{N}$, si $n=2k$ est pair, alors $a^n=(a^2)^k>0$ et la suite tend vers $+\infty$ et si $n=2k+1$ est impair, alors $a^n=a(a^2)^k<0$ et la suite tend vers $-\infty$. □

C) SUITE FACTORIELLE.

Proposition 3 : suite $(n!)$

La suite $(n!)$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} n!=+\infty$.

Démonstration :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n+1)!}{n!}=n+1>1$ et $0!=1!=1$ par convention, d'où la croissance de la suite. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n!\ge n$, donc par le théorème de comparaison de suites, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} n!=+\infty$. □

III CROISSANCES COMPAREES.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Nous dirons que (u_n) est négligeable devant (v_n) si, à partir d'un certain rang $N\in\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge N \Rightarrow v_n\neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$. Nous noterons : $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$.

Proposition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que : $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\ll} w_n$. Alors, $u_n \underset{+\infty}{\ll} w_n$. Nous dirons que la relation "$\ll$" est transitive.

Démonstration :

Soit $N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$. La limite tend bien vers 0. □

Nous voulons, grâce à cette caractérisation, comparer les vitesses de convergence des suites définies plus haut. En effet, une suite (u_n) convergera (ou divergera) moins vite qu'une autre (v_n) si (u_n) est négligeable devant (v_n). Les propositions 1 et 2 nous informent sur la divergence vers $+\infty$ si $b > 0$ et $a > 1$. Afin de comparer les trois suites définies au II, nous allons étudier ce cas.

Théorème 1 :

Soit $b > 0$ et $a > 1$. Alors nous avons :

$$n^b \underset{+\infty}{\ll} a^n \underset{+\infty}{\ll} n!.$$

Démonstration :

Nous remarquons aisément que les trois suites sont strictement positives pour $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, par la proposition 4, nous avons deux cas à étudier :

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^b}{a^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\ln u_n = b \ln n - n \ln a = n\left(b \frac{\ln n}{n} - \ln a\right)$, donc cette suite tend vers $-\infty$ et par composition, nous avons $\lim\limits_{\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$.
- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > a$, dans ce cas, soit $i \in \mathbb{N}$, si $a \leq i \leq n-1$, alors $\frac{a}{i} \leq 1$ et si $i < a$ alors $\frac{a}{i} \leq a$ d'où $u_n \leq \frac{a^{a+2}}{n}$ et ainsi $\lim\limits_{\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. □

Remarque 1 :

Une suite intéressante, du moins en terme de vitesse de convergence, est $\left((\ln n)^c\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est croissante vers $+\infty$ si $c > 0$, stationnaire en 1 si $c = 0$ et décroissante vers 0 si $c < 0$. Nous avons pour $(b,c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(\ln n)^c \underset{+\infty}{\ll} n^b$. Ce résultat se montre aussi en passant au logarithme népérien. En effet, soit $(b,c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\ln\left(\frac{(\ln n)^c}{n^b}\right) = c \ln \ln n - b \ln n = \ln n \left(c \frac{\ln \ln n}{\ln n} - b\right)$ et cette dernière suite tend vers $-\infty$.

Corollaire 1 :

Soit $b<0$ et $|a|<1$, $a\neq 0$. Nous avons alors :

$$\frac{1}{n!} \underset{+\infty}{\ll} a^n \underset{+\infty}{\ll} n^b .$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'inverse de ces suites. □

Remarque 2 :

Si $(b,c)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_-^*$, nous avons $n^b \underset{+\infty}{\ll} (\ln n)^c$.

IV APPLICATIONS.

A) CALCUL DE LIMITES.

Nous avons :

-*i*- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!-10^n}{n^{10}-2n!} = -\dfrac{1}{2}$.

-*ii*- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-n^2 2^n}{4^n-n^3} = 0$.

Démonstration :

Nous sommes dans le cas de limite indéterminé du type $\frac{\infty}{\infty}$. Il s'agit de mettre le terme de plus forte convergence en facteur. Nous avons alors :

-*i*- Soit $n\geq 1$, $\dfrac{n!-10^n}{n^{10}-2n!} = \dfrac{n!}{-2n!}\dfrac{1-\dfrac{10^n}{n!}}{1-\dfrac{n^{10}}{2n!}}$, d'où la limite vers $-\dfrac{1}{2}$.

-*ii*- Une petite astuce, ici, mais la remarque précédente marche aussi. Soit $n\geq 1$, $\dfrac{3^n-n^2 2^n}{4^n-n^3} = \dfrac{4^n}{4^n}\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{n^2}{2^n}}{1-\dfrac{n^3}{4^n}}$; le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers 1. D'où la limite vers 0. □

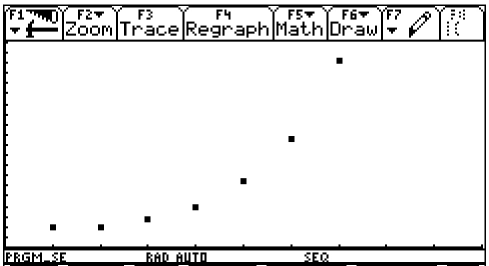
B) ETUDE D'UNE SUITE.

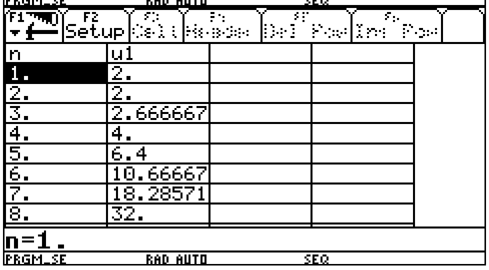
Nous nous proposons ici d'étudier au moyen d'une calculatrice la suite $(u_n)=\left(\dfrac{2^n}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $b=1$ et $b=10$.

Nous savons par le théorème 1 que cette suite diverge vers $+\infty$, quelque soit *b*.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

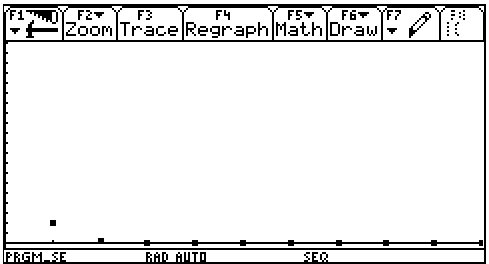
Pour $b=1$, nous obtenons la fenêtre ci-contre (abscisses entre 0 et 10 et ordonnées entre $-1/2$ et 20). La suite est croissante. En effet, $u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2^n}{n} \leq \frac{2^{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n$ et cette dernière assertion est toujours vérifiée pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous pouvons le constater sur la table de valeur de la suite comme l'indique le deuxième écran.



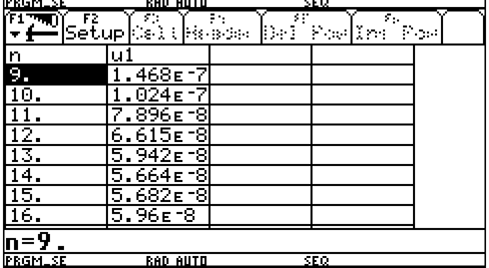


Pour $b=10$, cela devient moins évident, car la même fenêtre graphique donne l'écran ci-contre…

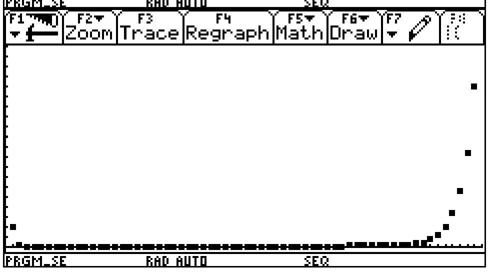
La suite tendrait-elle vers 0 ?



En fait, il faut aller plus loin dans notre observation. La table de valeur montre un revirement pour $n=15$ et nous avons : $u_{15}=5.682\times10^{-8}$. Cette valeur est très petite compte tenu des nombres très grands que sont 2^{15} et 15^{10}.



Prenons une fenêtre plus grande (abscisses entre 0 et 65 et ordonnées entre $-1/2$ et 20), et nous voyons notre suite « décoller »…



C) ORDRE DE GRANDEUR.

Nous avons l'inégalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$. (1)

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6 \Rightarrow \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

Démonstration :
Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ n \geq 6$.

Soit $P_n : "\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n"$.

$P_6 : \left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64$, $6! = 720$ et $\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 729$. Donc P_6 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Supposons P_n vraie, alors montrons que P_{n+1} est vraie.

Nous avons :

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{3}\left(\frac{n}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{n+1}{3}\left(\frac{n}{3}\right)^n 3 \text{ d'après la relation } (1),$$
$$\leq (n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

De même :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{n+1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^n 2 \text{ d'après la relation } (1),$$
$$\geq (n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, comme P_6 est vraie, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6 \Rightarrow \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. □

Nous avons ainsi donné un ordre de grandeur à la suite factorielle et nous avons introduit en plus un nouveau type de suite sous la forme : $\left(n^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

D) ERREUR NUMERIQUE.

Nous allons étudier l'exemple du calcul numérique de e^{-x}, pour certaines valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, nous posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{i!}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Etudier la suite (u_i) de terme général $\frac{k^i}{i!}$.

(u_i) est croissante $\Leftrightarrow u_i \leq u_{i+1} \Leftrightarrow \frac{k^i}{i!} \leq \frac{k^{i+1}}{(i+1)!} \Leftrightarrow i \leq k-1$.

De même (u_i) est décroissante nous amène à $i \geq k-1$.

De plus, par le théorème 1, nous avons : $\lim_{i\to+\infty} u_i = 0$.

Le maximum de la suite est atteint pour $i = k-1$ et $i = k$ car $\frac{k^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{k^k}{k!}$ et par ce qui précède. □

Les deux points suivants me semblent difficile à justifier au niveau du lycée. Il vaut mieux donner le résultat final (d'ailleurs, la démonstration n'a que peu d'intérêt dans cette leçon !).

- Au moyen d'une démonstration par récurrence montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair implique $e^{-x} \leq s_n(x)$ et n impair implique $e^{-x} \geq s_n(x)$.

Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n :" n pair implique $e^{-x} \leq s_n(x)$ et n impair implique $e^{-x} \geq s_n(x)$".

P_0 : $n = 0$ est pair et nous avons bien : $e^{-x} \leq 1$. Donc P_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie, et montrons que P_{n+1} est vraie.

Soit la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$
$$y \mapsto e^{-x} - s_{n+1}(x).$$

La fonction g est infiniment dérivable et soit $y \in \mathbb{R}_+$, $g'(y) = s_n(x) - e^{-x}$.

Supposons n pair. Alors, par hypothèse de récurrence, la fonction dérivée est positive, et la fonction g sera croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $g(0) = 0$. P_{n+1} est vraie.

Il en est de même si n est impair.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, comme P_0 est vraie, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair implique $e^{-x} \leq s_n(x)$ et n impair implique $e^{-x} \geq s_n(x)$. □

- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|e^{-x} - s_n(x)\right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, n impair. Nous avons : $e^{-x} - s_n(x) \geq 0 \geq -\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et d'autre part, $0 \geq e^{-x} - s_{n+1}(x) = e^{-x} - s_n(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où $e^{-x} - s_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Il en va de même si n est pair. Ce qui montre la proposition. □

- Cette dernière proposition permet d'avoir une estimation de l'erreur de méthode. En effet, par le théorème 1 sur les croissances comparées, nous savons que $(s_n(k))$ va converger vers e^{-k}, où $k \in \mathbb{N}$, très rapidement dès lors que n est très grand devant k.
- Nous allons à présent écrire un algorithme qui permet de donner une approximation de e^{-k}, où $k \in \mathbb{N}$ à 10^{-10} près.

Il vaudrait mieux utiliser une TI-83 par exemple car elle est déjà en calcul approximatif. Sinon, il suffit de l'imposer sur une TI Voyage 200, comme ce sera le cas ci-après.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

Voici un algorithme calculant $(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ à l'aide d'une boucle du type $-y \times x/n \rightarrow y$ et en incrémentant n.

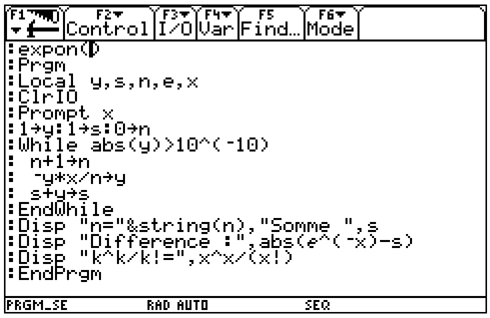
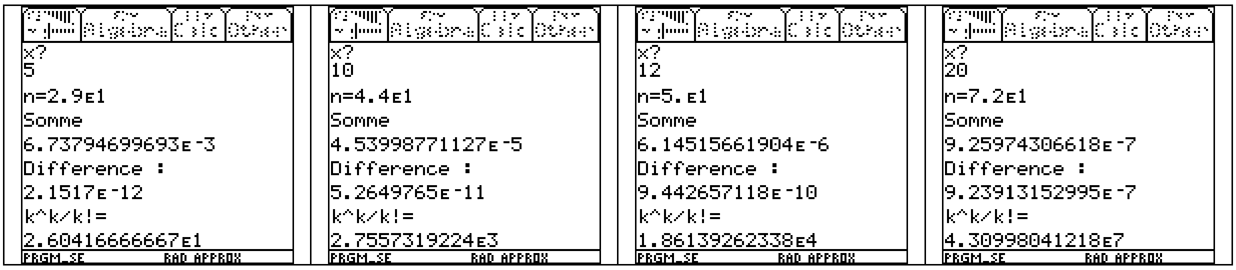


Tableau donnant quelques valeurs de $s_n(k)$ pour $k = \{5, 10, 12, 20\}$.



- Comment expliquer ces différences de calculs dès que $n \geq 12$? En fait, cela vient (comme nous pourrions nous en douter !) du calcul approximatif. En effet, le plus grand terme de la somme est $\frac{k^k}{k!}$, ceci en vertu du premier point. La calculatrice calcule avec 14 chiffres significatifs. Or pour $k = 12$, la calculatrice a tronqué une partie du plus grand terme de la somme ; mais cette partie est importante pour faire la somme !
  En conclusion, cette méthode devient inutilisable dès que nous utilisons des approximations car pour calculer un petit nombre : $6.145157\text{E-}6$, nous sommes obligés de calculer de grands nombres : $1.8613926234\text{E}4$.

Remarque 3 :

Si la calculatrice peut faire du calcul exact, alors cette méthode marche très bien (quitte à ne pas dépasser les capacités de la machine) !

V CONCLUSION.

Nous avons étudié trois types de suites qui ont apparemment (selon les coefficients !) le même comportement à l'infini, mais qui finalement ont des vitesses de convergence assez différentes. Ces suites sont des suites de références permettant, entre autres de calculer des limites, des ordres de grandeurs. De plus, elles permettent de s'apercevoir des limites d'une machine en calculant des infiniment petits à l'aide d'infiniment grands.