

# EXEMPLES DE REPRESENTATION PARAMETRIQUE DES CONIQUES ; CONSTRUCTIONS DE LA TANGENTE ET DE LA NORMALE EN UN POINT A UNE PARABOLE, UNE ELLIPSE, UNE HYPERBOLE.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Définitions monofocale et par équation réduite des coniques – Propriétés bifocales des coniques à centre – Tangente en un point régulier – Affinité –

Nous nous plaçons dans le plan affine euclidien orienté, et nous considérons le repère orthonormal  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  où  $\mathcal{D}(O, \vec{e}_2)$  est la directrice de la conique  $\Gamma$  étudiée.

## I INTRODUCTION.

Nous connaissons les définitions monofocale et par équation réduite des coniques. Nous allons ici voir qu'il est possible de les représenter grâce à l'outil paramétrisation, et que cette représentation est loin d'être unique. Cet outil va nous permettre de déterminer s'il est possible d'avoir des tangentes, et en plus, si c'est possible, d'en faire une construction géométrique. Le plan choisit, est d'étudier chacune des trois coniques les unes après les autres.

## II PARABOLE.

### A) PARAMETRISATION.

Nous rappelons qu'une parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$  admet pour équation réduite :  $y^2 = 2px$ , où  $p \in \mathbb{R}_+^*$  est le paramètre tel que, si  $K$  est le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\overrightarrow{KF} = p\vec{e}_1$ .

Proposition 1 :

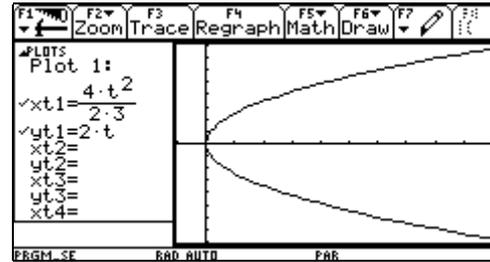
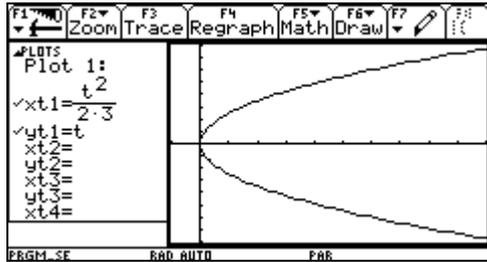
Une paramétrisation possible de la parabole  $\mathcal{P}$  est :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$t \mapsto \left( \frac{t^2}{2p}, t \right).$$

Remarque 1 :

- Ce système n'est évidemment pas unique : prendre  $\tilde{t} = 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  par exemple.

Voici deux écrans de la TI Voyage200 avec  $p = 3$  et en utilisant la remarque ; nous trouvons bien évidemment la même courbe, cependant le tracé de la seconde est plus rapide...



Démonstration :

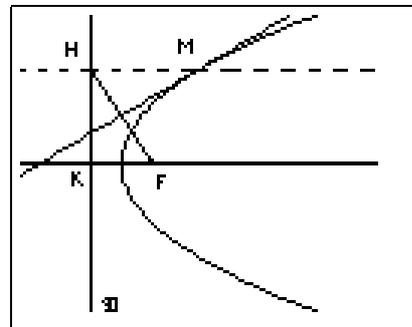
$$M(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{y^2}{2p} \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \text{ d'où le résultat en prenant } y = t. \quad \square$$

## **B) CONSTRUCTION DE LA TANGENTE EN UN POINT.**

Théorème 1 :

Soit une parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$ . Alors elle admet une tangente en chacun de ses points.

Soit  $M \in \mathcal{P}$  et  $H$  son projeté orthogonal sur la directrice  $\mathcal{D}$ . Alors la tangente en  $M$  à  $\mathcal{P}$  est la médiatrice de  $[FH]$ .



Démonstration :

En utilisant les notations de la proposition 1,  $f$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = \left( \frac{t}{p}, 1 \right)$  et ce vecteur ne s'annule jamais, ce qui assure l'existence de la tangente en tout point  $M(f(t))$  de la parabole, dirigée par le vecteur  $\vec{u}(f'(t))$ .

De plus, nous avons  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  et  $H\left(-\frac{p}{2}, t\right)$ , nous en déduisons :

$$\overrightarrow{FH} \cdot \vec{u} = (p, -t) \cdot \left( \frac{t}{p}, 1 \right) = 0.$$

Ainsi la tangente sera perpendiculaire à la droite  $(FH)$ . Comme le point  $M$  est situé à égale distance de  $F$  et de  $H$ , il s'ensuit que la tangente  $M$  à  $\mathcal{P}$  est la médiatrice de  $[FH]$ .  $\square$

Remarques 2 :

- Il s'ensuit que la normale en  $M$  est la droite parallèle à la droite  $(FH)$  et passant par  $M$ .
- La tangente en un point  $M$  de la parabole est aussi la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{FMH}$ .

### III ELLIPSE.

#### A) PARAMETRISATION.

Nous rappelons qu'une ellipse  $\mathcal{E}$ , dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}$ , admet pour équation réduite :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , avec  $0 < b \leq a$ .

Proposition 2 :

Une paramétrisation possible de l'ellipse  $\mathcal{E}$  est :

$$g : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t)).$$

Remarque 3 :

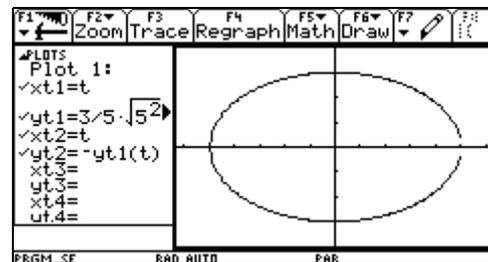
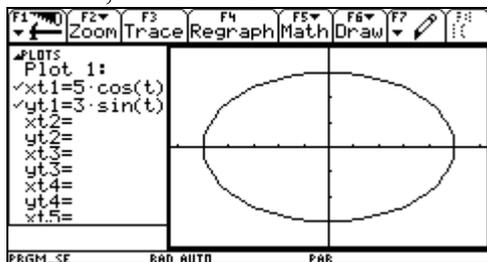
- Une autre paramétrisation, qui provient de l'équation fonctionnelle  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,

$x \in [-a, a]$  est :

$$\tilde{g} : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto \left( t, \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right).$$

De nouveau, deux écrans avec  $a = 5$  et  $b = 3$  :



Démonstration :

D'après les propriétés des sinus et cosinus, à tout couple  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $u^2 + v^2 = 1$ , nous pouvons faire correspondre un réel  $t$ , défini à  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  près, tel que :

$$\begin{cases} u = \cos(t), \\ v = \sin(t). \end{cases}$$

Soit  $M(x, y)$  un point du plan, nous avons :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi[ \text{ tel que } \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos(t), \\ \frac{y}{b} = \sin(t). \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi la paramétrisation voulue. □

## B) CONSTRUCTION DE LA TANGENTE EN UN POINT.

### Proposition 3 :

Toute ellipse admet une tangente en chacun de ses points.

### Démonstration :

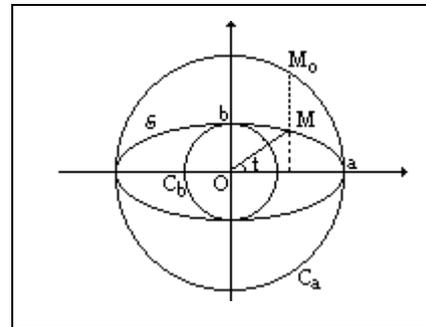
En utilisant les notations de la proposition 2,  $g$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$  et ce vecteur ne s'annule jamais, ce qui assure l'existence de la tangente en tout point  $M(g(t))$  de la parabole, dirigée par le vecteur  $\vec{u}(g'(t))$ .  $\square$

### Définition 1 :

Nous appelons cercles principaux de l'ellipse  $\mathcal{E}$  les deux cercles centrés en  $O$ , de rayons  $a$  et  $b$  notés respectivement  $C_a$  et  $C_b$ .

Dans ce cas, l'ellipse  $\mathcal{E}$  définie par la paramétrisation de la proposition 2 peut être considérée comme image d'un de ses cercles principaux par une affinité orthogonale :

- image de  $C_a$  par l'affinité orthogonale  $\alpha$  d'axe des abscisses et de rapport  $b/a$ .
- image de  $C_b$  par l'affinité orthogonale  $\beta$  d'axe des ordonnées et de rapport  $a/b$ .



En effet, pour  $t \in [0, 2\pi[$ ,  $M(a \cos(t), b \sin(t)) \in \mathcal{E}$  et  $M_0(a \cos(t), a \sin(t)) \in C_a$ . Ainsi  $\forall t \in [0, 2\pi[$ ,  $\alpha(M_0(t)) = M(t)$ , d'où nous déduisons l'inclusion  $\alpha(C_a) \subset \mathcal{E}$ . L'inclusion réciproque se vérifie aisément.

### Théorème 2 :

Soit  $M \in \mathcal{E}$ , distinct des sommets. La tangente à  $\mathcal{E}$  en  $M$  est la droite  $(TM)$ , où  $T$  est l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à  $C_a$  en  $M_0$ .

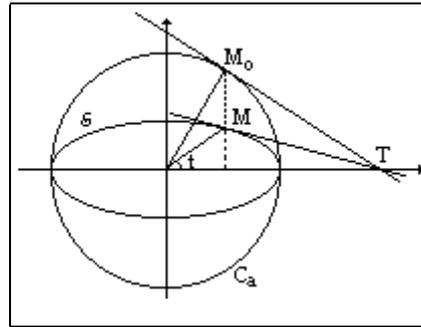
### Démonstration :

Par propriétés, l'affinité conserve les contacts et les points de l'axe sont invariants.

Une propriété des tangentes à une ellipse est : une droite est une tangente à l'ellipse si leur intersection est réduite à un et un seul point.

Soit  $t \in [0, 2\pi[$ . Si  $t = 0$ , alors la tangente à l'ellipse en  $M(a, 0)$  est une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par  $M(a, 0)$ . Si  $t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ , alors la tangente à l'ellipse en  $M(0, \varepsilon b)$ , où  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  est une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par  $M(0, \varepsilon b)$ .

Si  $t \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ , alors, la tangente à  $C_a$  coupe l'axe des abscisses en un point  $T$ . Or ce point est invariant, donc  $\alpha((NT)) = (MT)$ .



Il reste à voir que cette droite est bien la tangente à l'ellipse en  $M$ .

L'affinité est une bijection affine, donc elle transforme une tangente à  $C_a$  en une droite qui coupera l'ellipse en un unique point, *i.e.* : la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $M$ .  $\square$

Remarque 4 :

- La tangente au point  $M$  est la bissectrice extérieure de l'angle  $\widehat{FMF'}$ , où  $F$  et  $F'$  sont les deux foyers de l'ellipse.

## IV HYPERBOLES.

### A) PARAMETRISATION.

Nous rappelons qu'une hyperbole  $\mathcal{H}$ , dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}$ , admet pour équation réduite :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Proposition 4 :

Une paramétrisation possible de l'hyperbole  $\mathcal{H}$  est :

$$h : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto \left( \pm \frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t) \right).$$

Remarque 5 :

- Une autre paramétrisation, qui provient de l'équation fonctionnelle  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ ,

$x \in \mathbb{R} \setminus ]-a, a[$  est :

$$\tilde{h}_1 : \mathbb{R} \setminus ]-a, a[ \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto \left( t, \pm \frac{b}{a} \sqrt{t^2 - a^2} \right).$$

- Une autre paramétrisation, intéressante du point de vue analogue avec l'ellipse et du point de vue de la régularité :

$$\tilde{h}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

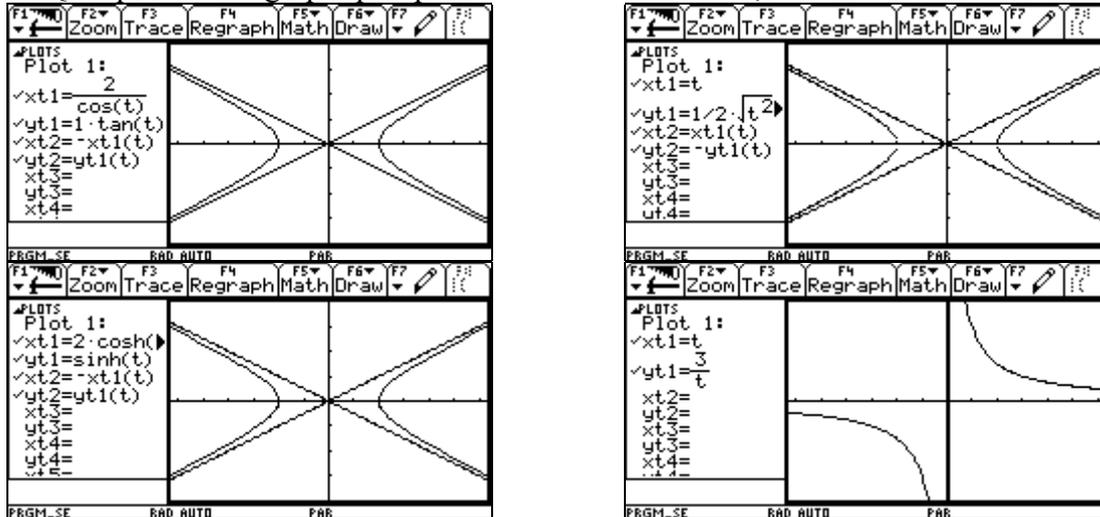
$$t \mapsto (\pm a \cosh(t), b \sinh(t)).$$

- Enfin, une dernière paramétrisation classique, provenant de l'équation  $xy = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  mais qui n'est pas dans le même repère que les précédentes :

$$\tilde{h}_3 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$t \mapsto \left( t, \frac{k}{t} \right)$$

Quelques écrans graphiques pour visualiser avec  $a = 2$ ,  $b = 1$  et  $k = 3$  :



Démonstration :

Soit  $M(x, y)$ .

$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{(ay)^2}{(bx)^2} = 1$ , et par analogie avec la preuve de l'ellipse, il

vient :  $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $\exists t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  tel que :  $\frac{a}{x} = \cos(t)$ ,  $\frac{ay}{bx} = \sin(t)$ , d'où la paramétrisation cherchée. □

### **B) CONSTRUCTION DE LA TANGENTE EN UN POINT.**

Proposition 5 :

Toute hyperbole admet une tangente en chacun de ses points.

Démonstration :

En utilisant les notations de la proposition 4,  $h$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(t) = \left( \pm \frac{a \sin(t)}{(\cos(t))^2}, \frac{b}{(\cos(t))^2} \right)$$

et ce vecteur ne s'annule jamais, ce qui assure l'existence de

la tangente en tout point  $M(h(t))$  de la parabole, dirigée par le vecteur  $\vec{u}(h'(t))$ . □

Théorème 3 :

Soit  $M \in \mathcal{H}$ . La tangente à l'hyperbole  $\mathcal{H}$  en  $M$  coupe les deux asymptotes en deux points  $U$  et  $V$  symétriques par rapport à  $M$ .

Démonstration :

La tangente en  $M(x_0 = h_1(t_0), y_0 = h_2(t_0))$  a pour équation :  $\begin{vmatrix} x - h_1(t_0) & h_1'(t_0) \\ y - h_2(t_0) & h_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0$ .

Ce qui donne, après transformations :  $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$ .

Si  $y_0 = 0$ , alors la tangente a pour équation  $x = \frac{a^2}{x_0}$ , car  $x_0$  et  $y_0$  ne s'annule pas ensemble. Par symétrie de la courbe, le théorème est prouvé dans ce cas.

Si  $y_0 \neq 0$ , alors la tangente a pour équation :  $y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \left(-\frac{b^2}{y_0}\right)$ .

De plus, les équations des asymptotes sont :  $y = \pm \frac{b}{a} x$ . Ainsi, nous avons

l'équivalence : une tangente et une asymptote sont parallèles  $\Leftrightarrow \pm \frac{b}{a} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{b}{a} x_0$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$ , or cette dernière assertion est fautive. Ainsi, les tangentes à la courbe ne sont jamais parallèles à l'une des asymptotes.

Nous pouvons alors déterminer les points  $U$  et  $V$ , points d'intersection de la tangente

en  $M$  avec les deux asymptotes :  $U \begin{pmatrix} \frac{a^2 b}{b x_0 - a y_0} \\ \frac{b^2 a}{b x_0 - a y_0} \end{pmatrix}, V \begin{pmatrix} \frac{a^2 b}{b x_0 + a y_0} \\ \frac{-b^2 a}{b x_0 + a y_0} \end{pmatrix}$ . Considérons alors les

vecteurs :  $\overline{UM} \begin{pmatrix} x_0 - \frac{a^2 b}{b x_0 - a y_0} \\ y_0 - \frac{b^2 a}{b x_0 - a y_0} \end{pmatrix}$  et  $\overline{UV} \begin{pmatrix} \frac{-2 a y_0}{b} \\ \frac{-2 b x_0}{a} \end{pmatrix}$  (les coordonnées du second vecteur ont ici

été simplifiées en réduisant au même dénominateur et en utilisant la relation :  $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ ).

Nous avons :

$$\begin{cases} x_0 - \frac{a^2 b}{b x_0 - a y_0} \\ y_0 - \frac{b^2 a}{b x_0 - a y_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \frac{a^2 b (b x_0 + a y_0)}{a^2 b^2} \\ y_0 - \frac{b^2 a (b x_0 + a y_0)}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{b} y_0 \\ -\frac{b}{a} x_0 \end{cases}$$

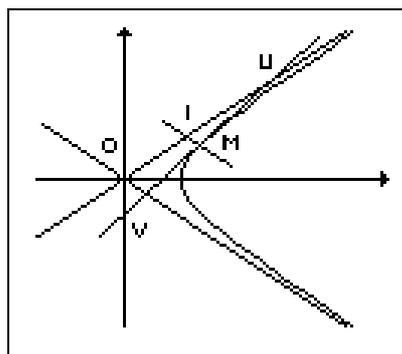
Nous obtenons alors :  $\overline{UV} = 2\overline{UM}$ , ce qui termine la preuve. □

Proposition 6 :

Soit  $M \in \mathcal{K}$  la parallèle à une asymptote mené par  $M$  coupe l'autre en  $I$ . Soit  $U$  tel que :  $\overline{OU} = 2\overline{OI}$ , alors la tangente à l'hyperbole en  $M$  est la droite  $(UM)$ .

Démonstration :

C'est une conséquence du théorème précédent ainsi que du théorème de Thalès.  $\square$



Remarque 6 :

- La tangente au point  $M$  est la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{FMF'}$ , où  $F$  et  $F'$  sont les deux foyers de l'hyperbole.

**V METHODE COMMUNE DE CONSTRUCTION DE LA TANGENTE.**

Théorème 4 :

Pour toute conique  $\Gamma$  de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e$ , la tangente en un point  $M$  quelconque de  $\Gamma$  différent d'un sommet de  $\Gamma$  est telle que l'angle  $\widehat{MFT}$  soit droit (où  $T$  désigne le point d'intersection de la tangente et de la directrice).

Remarque 7 :

- Si  $M$  est un sommet, la tangente est parallèle à la directrice  $\mathcal{D}$ .

Démonstration :

Soit  $M(x(t), y(t)) \in \Gamma$ ,  $F(c, 0)$  et  $T(0, \tau)$ . Supposons  $x' \neq 0$ , alors  $\tau = y - x \frac{y'}{x'}$ .

De plus, nous avons :  $MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2 x^2$ . Et en dérivant par rapport à  $t$ , nous obtenons  $y y' = (e^2 x - x + c) x'$ .

$$\overline{FM} \cdot \overline{FT} = -c(x-c) + y\tau = -c(x-c) + y \left( y - x \frac{y'}{x'} \right) = -c(x-c) + y^2 - (e^2 x - x + c)x,$$

et en utilisant la relation  $y^2 = e^2 x^2 - (x-c)^2$ , il vient  $\overline{FM} \cdot \overline{FT} = 0$ .  $\square$

**VI CONCLUSION.**

L'introduction de la notion de représentation paramétrique pour les coniques nous a permis de dégager deux idées importantes : d'une part, toute conique admet une tangente en chacun de ses points, et d'autre part, cela permet de trouver des constructions géométriques de la tangente en un point, la normale étant facilement constructible par la suite.