Sylvain ETIENNE
PLC 1, groupe 1

EXPOSE 46 : DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE. EQUATIONS. POSITIONS RELATIVES ; PLANS CONTENANT UNE DROITE DONNEE.

Niveau : Terminale S.

Pré requis : Vecteurs dans le plan et dans l'espace – Produit scalaire – Notion de parallélisme de droites et plans – Notion d'orthogonalité de droites et plans – Système d'équations.

I. INTRODUCTION.

Un plan se définit de manière intuitive comme étant une feuille de papier ou le tableau. Il est aisé de voir les propriétés telles le parallélisme, l'orthogonalité de deux droites. Cependant, représenter l'espace est déjà beaucoup moins évident. L'objet de cette leçon est d'appréhender, au travers de la caractérisation vectorielle, la notion de plans et de droites dans l'espace.

Nous nous plaçons dans un espace euclidien $\mathcal{E}$ ayant le repère orthonormal suivant : $\left(O\ ;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$.

II. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE.

A) DEFINITIONS.

Définition 1 :

Etant donné un point A et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace : l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, t réel quelconque est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ notée $\mathcal{D}\left(A,\vec{u}\right)$.

Définition 2 :

Etant donné un point A et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace Alors, l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan passant par A, et de vecteur normal $\vec{n}$, noté $\mathcal{P}\left(A,\vec{n}\right)$.

B) PROPRIETE.

Proposition 1 :

La donnée de deux points distincts A et B définit une et une seule droite.

Démonstration :

Soit le vecteur non nul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors A et $\vec{u}$ vérifient la définition 1. □

III. EQUATIONS DE PLANS, DE DROITES.

A) EQUATIONS DE PLANS.

Théorème 2 : équation cartésienne d'un plan.

> Soit $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ un vecteur non nul.
>
> Les plans admettant $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ comme vecteur normal sont les plans dont une équation cartésienne est de la forme :
>
> $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, où δ est un nombre réel quelconque.

Démonstration :

- Le plan passant par $A(x_0,y_0,z_0)$, et admettant le vecteur non nul $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ comme vecteur normal est, par définition, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
  La traduction analytique de cette relation donne $\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$, soit en posant $\delta=-(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)$:
  $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, avec α ou β ou γ non nul.
- Réciproquement, étant donné trois réels α,β et γ non tous nuls, montrons que l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x,y,z)$ de $\mathscr{E}$ tels que $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$:
  Soit $A(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathscr{P}$ (« il en existe ! »), alors $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta=0$.
  Or $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ équivaut à $\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$.

Ainsi : $M(x,y,z)\in\mathscr{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. □

Corollaire 3 : équation paramétrique d'un plan.

> Soit un point $A(x_a,y_a,z_a)$ et deux vecteurs $\vec{i}(a,b,c)$ et $\vec{j}(a',b',c')$ non colinéaires.
>
> Le plan de repère $(A\,;\vec{i},\,\vec{j})$ est caractérisé par le système d'équations :
>
> $$\begin{cases} x=x_a+s\,a+t\,a' \\ y=y_a+s\,b+t\,b' \\ z=z_a+s\,c+t\,c' \end{cases} \quad \text{où } s\in\mathbb{R}, \text{ et } t\in\mathbb{R}.$$
>
> Ce système est appelé représentation paramétrique du plan.

Démonstration :

- Montrons que la donnée d'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ implique la donnée d'une équation paramétrique de $\mathscr{P}$.
  Considérons le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, où $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ et δ réel. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\alpha\neq0$. Dans ce cas :

$M(x,y,z)\in\mathcal{P}$ si et seulement si $\begin{cases} x=-\delta/\alpha-\beta/\alpha\ y-\gamma/\alpha\ z \\ y=0+1y+0z \\ z=0+0y+1z \end{cases}$ avec $y\in\mathbb{R},\ \ z\in\mathbb{R}$.

Si $A(-\delta/\alpha,0,0)$, $\vec{i}(-\beta/\alpha,1,0)$ et $\vec{j}(-\gamma/\alpha,0,1)$, nous retrouvons la représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

- Réciproquement, il s'agit d'éliminer les variables *s* et *t* de deux des trois équations, puis de reporter ces valeurs dans la troisième. Le chapitre sur les systèmes d'équations (qui sera donc fait avant !) nous donne la réciproque. □

Exemple :

Soit les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésienne $\mathcal{P}_1 : 2x+y-4z+6=0$ et $\mathcal{P}_2 : y-5=0$.
Donner un repère à chacun de ces plans.
Après calcul, nous trouvons :

– Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour repère $\left(A_1\ ;\ \vec{i_1},\vec{j_1}\right)$ avec $A_1(-3,0,0)$, $\vec{i_1}\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$ et $\vec{j_1}(2,0,1)$.
– Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour repère $\left(A_2\ ;\ \vec{i_2},\vec{j_2}\right)$ avec $A_2(0,5,0)$, $\vec{i_2}(1,0,0)$ et $\vec{j_2}(0,0,1)$.

Point méthode :

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan P :

- Si nous connaissons un point *A* et un vecteur normal $\vec{n}$, alors :
  $$M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
- Si nous connaissons trois points *A, B* et *C* de $\mathcal{P}$, alors il faut écrire une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$, et éliminer les paramètres.

B) EQUATIONS DE DROITES.

Proposition 4 : Représentation paramétrique.

Considérons les points $A(\alpha,\beta,\gamma)$ et $B(p,q,r)$, $A\neq B$. Alors nous avons le système de relations appelé représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\begin{cases} x=\alpha+t(p-\alpha) \\ y=\beta+t(q-\beta) \\ z=\gamma+t(r-\gamma) \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Démonstration :

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ (*t* réel). Avec $\overrightarrow{AB}(p-\alpha,q-\beta,r-\gamma)$ et $\overrightarrow{AM}(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)$, nous obtenons le système (3.1). □

Exemple :

Prenons les points $A(1,0,1)$ et $B(2,-1,0)$. Une équation paramétrique de la droite (AB) est :

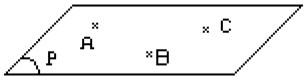
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

C) UN INTERET AUX EQUATIONS DE PLANS.

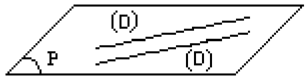
Proposition 5 :

Les données suivantes déterminent chacun un et un seul plan :

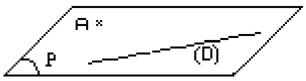
Trois points non alignés :



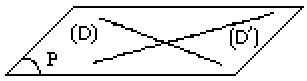
Deux droites parallèles distinctes :



Une droite et un point extérieur à celle-ci :



Deux droites sécantes :



Démonstration :

Ces quatre propositions sont évidemment équivalentes par la proposition 1.
L'équivalence entre la donnée de trois points et la donnée d'un point et d'un vecteur normal peut être démontrée grâce aux équations de plan ; et notamment par le théorème 2 et le corollaire 3. □

Remarque :

- La démonstration est aisée si nous avons à notre disposition le produit vectoriel.

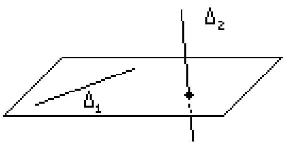
IV POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS.

A) POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS.

Définition 3 :

Deux droites distinctes peuvent être :

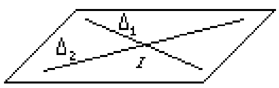
– ou non coplanaires :



$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$.

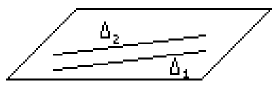
– ou coplanaires : ces droites sont alors :

– soit sécantes :



$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{I\}$.

– soit strictement parallèles :

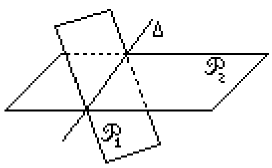


$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$.

Définition 4 :

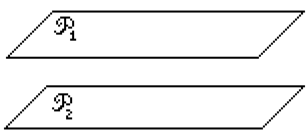
Deux plans distincts peuvent être :

– soit sécants :



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$.

– soit parallèles :

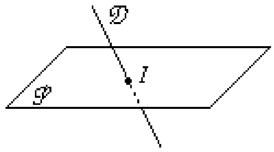


$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$.

Définition 5 :

Une droite peut-être :

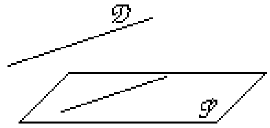
– sécante à un plan :



$\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{I\}$.

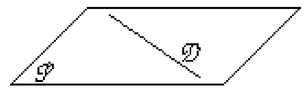
– parallèle à un plan ; elle est alors :

– soit strictement parallèle au plan :



$\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

– soit contenue dans le plan :



$\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D}$.

Remarque : équation cartésienne d'une droite.

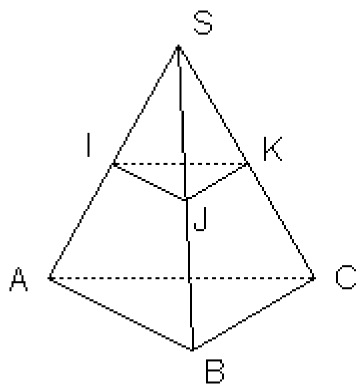
Comme deux plans distincts $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sécants se coupent en une droite Δ, nous avons l'équation cartésienne d'une droite s'exprimant comme suit :

Si $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est une équation de $\mathcal{P}_1$ et $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$ une équation de $\mathcal{P}_2$, alors :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{est une équation de } \Delta.$$

Exemples :

Soit SABC un tétraèdre, I, J et K les milieux respectifs des arêtes [SA], [SB] et [SC].Dans le plan (SAB), la droite joignant les milieux I et J est parallèle à (AB). De même, (JK) est parallèle à (BC) et (IK) parallèle à (AC).



Les droites (SA) et (BC) sont non coplanaires.
Les droites (AC) et (BC) sont sécantes.
Elles se coupent en C.
Les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

Les plans (SAB) et (SBC) sont sécants : leur intersection est la droite (SB).
Les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

La droite (BC) et le plan (SAB) sont sécants. Ils se coupent en B.
La droite (IJ) est strictement parallèle au plan (ABC).
La droite (IJ) est incluse dans le plan (IJK).

B) PLANS CONTENANT UNE DROITE DONNEE.

Sous forme d'un Travail Dirigé.

1) Démontrer que l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 & (1) \\ x + 2z - 3 = 0 & (2) \end{cases},$$

est une droite $\mathcal{D}$. Donner un vecteur directeur de cette droite.

2) Soit α et β deux réels non tous les deux nuls.

Soit $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0.$$

a) Démontrer que $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ est un plan de l'espace, pour tout couple de réels $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

b) Démontrer que, pour tout couple de réels $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

Nous admettons que tout plan contenant la droite $\mathcal{D}$ est un plan $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

3) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et passant par l'origine.

Réponses :

1) (1) et (2) sont deux équations de plans, que nous noterons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement. Or d'après la définition 4, deux plans sont soit sécants, soit parallèles.

$\overrightarrow{n_1}(2,1,0)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n_2}(1,0,2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans se coupent en une droite $\mathcal{D}$.

Il s'agit à présent de donner un vecteur directeur de cette droite ; pour cela, il faut mettre le système sous forme paramétrique.

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x+2z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1-2x\\z=3/2-1/2\ x\end{cases}.$$

Les solutions du système sont les triplets $(x,-1-2x,3/2-1/2\,x)$ où x est un réel quelconque.

Ainsi,
$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x+2z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-1-2t\\z=3/2-1/2\ t\end{cases}.$$

Nous reconnaissons la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ qui passe par $A(0,-1,3/2)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1,-2,-1/2)$ et qui est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2) a) Nous avons : $\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0\Leftrightarrow(2\alpha+\beta)x+\alpha y+2\beta z+(\alpha-3\beta)=0$.

Nous reconnaissons la représentation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(2\alpha+\beta,\alpha,2\beta)$, ceci à condition que $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Ainsi $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ est un plan de l'espace.

b) Soit $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, soit $M(x,y,z)$ un point de la droite $\mathcal{D}$. Montrons que $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

Si $\alpha=0$, alors $\beta\left(x+2z-3\right)=0$, *i.e.* : $\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0$.

Si $\beta=0$, alors $\alpha\left(2x+y+1\right)=0$, *i.e.* : $\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0$.

Si $\alpha\neq0$ et $\beta\neq0$, alors nous avons directement : $\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0$.

Ainsi, le point $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$.

3) Un plan contenant la droite $\mathcal{D}$ est de la forme : $\alpha\left(2x+y+1\right)+\beta\left(x+2z-3\right)=0$ où $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. De plus, nous désirons que ce plan passe par le point $O(0,0,0)$.

D'où $\alpha\left(2\cdot0+0+1\right)+\beta\left(0+2\cdot0-3\right)=0$, *i.e.* : $\alpha=3\beta$ et $\alpha\times\beta\neq0$.

Une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et passant par l'origine est : $7x+3y+2z=0$.

V CONCLUSION.

En conclusion, nous avons caractérisé les droites et plans dans l'espace de façon vectorielle. Cela nous a conduit naturellement vers les équations cartésiennes et paramétriques. Enfin, nous avons vu le comportement de droites et plans entre eux.