Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

RELATIONS METRIQUES ET TRIGONOMETRIQUES DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE. APPLICATIONS.

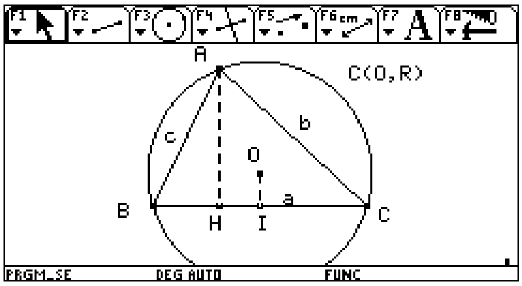
Niveau : Terminale S.

Pré-requis : Vecteurs – Produit scalaire – Trigonométrie – Points remarquables d'un triangle – Relation de Chasles –

Nous nous plaçons dans cet exposé dans un plan affine euclidien P.

I INTRODUCTION.

Un triangle ABC est la donnée de trois points A, B, C appelés sommets et des trois segments associés, appelés côtés. Nous considérons pour la suite un triangle ABC non plat (certains résultats sont encore vrais pour un triangle plat !). Nous utiliserons les notations suivantes :



Les longueurs des côtés BC, AC, AB sont respectivement a, b, c.

$\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ sont les mesures dans $[0,\pi]$ des angles géométriques du triangle.

I est le milieu de $[BC]$.

H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R : c'est le cercle circonscrit au triangle.

Nous pouvons supposer que le plan est orienté et que le triangle orienté ABC est direct, *i.e.* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe du plan.

II RELATIONS METRIQUES ET TRIGONOMETRIQUES.

Commençons par donner un résultat important sur la somme des angles :

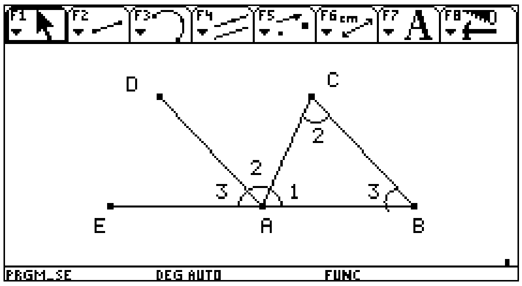
Théorème 1 :

> La somme des angles orientés (resp. géométriques) du triangle ABC est égale à π modulo 2π (resp. égale à π).

Démonstration :

La somme des angles orientés est égale à : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$. Il suffit à présent de remplacer $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ par $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)$ qui détermine le même angle. La relation de Chasles implique alors que cette somme est égale à l'angle de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\right)$, qui est l'angle plat.

Soit les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$. L' angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ est égal à $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, ce couple est direct et $\widehat{CBA} = \widehat{DAE}$.



Nous avons aussi : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$; par suite, le couple $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est direct et $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$. Les points A, B, C, D, E sont dans un même demi-plan délimité par la droite (AB). Le théorème d'additivité sur les angles géométriques (supposé connu !) donne : $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \widehat{BAE} = \pi$, d'où : $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \pi$. □

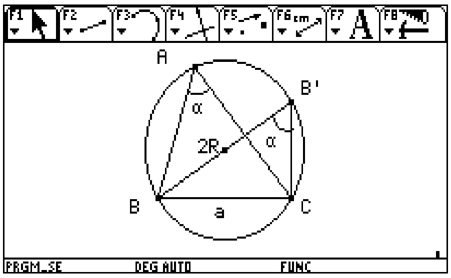
Proposition 1 (relation des sinus dans un triangle) :

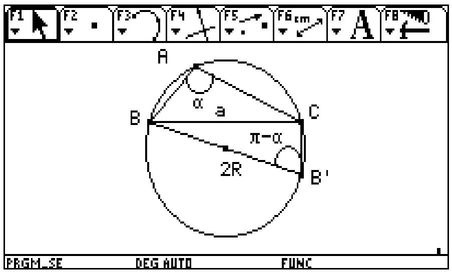
Nous avons, dans le triangle ABC, les relations suivantes :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Démonstration :

Il y a deux cas, suivant que $\widehat{BAC}$ soit aigu ou obtus. Soit B' le point opposé à B sur le cercle circonscrit.





Le théorème de l'angle inscrit nous donne que la mesure de l'angle en B' du triangle rectangle $BB'C$ vaut $\hat{A}$ ou $\pi - \hat{A}$. Or $\sin\left(\pi - \hat{A}\right) = \sin \hat{A}$ et $\frac{BC}{BB'} = \sin \hat{A}$, d'où $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$. □

Nous allons à présent donner les formules d'Al Kashi, qui est un mathématicien arabe du quatorzième siècle.

Proposition 2 (formules d'Al Kashi) :

Nous avons, dans le triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Par permutation circulaire, nous obtenons de même :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B},$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \hat{C}.$$

Démonstration :

Nous avons : $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, et nous utilisons le fait que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC\,AB \cos \hat{A}$. Les deux autres formules se montrent par permutation circulaire. □

Remarque 1 :

- Dans le cas d'un triangle rectangle, nous retrouvons le théorème de Pythagore.

Théorème 2 (théorème de la médiane) :

Avec les notations du début, nous avons les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

$$c^2 + b^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}a^2,$$

$$c^2 - b^2 = 2\overline{IH}\times\overline{BC}.$$

Démonstration :

Nous avons : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right) = AI^2 + \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$. Or I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$, donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$ et $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} = -\frac{a^2}{4}$. D'où la première formule.

En utilisant la première formule d'Al Kashi sous la forme : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, nous en déduisons immédiatement la deuxième formule.

Nous avons : $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$, et regardons la quantité $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}$. D'une part, elle est égale à $2\overline{IH}\times\overline{BC}$ par propriété du produit scalaire et d'autre part, elle vaut en développant : $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = BA^2 - AC^2$. En regroupant les deux égalités, nous obtenons : $c^2 - b^2 = 2\overline{IH}\times\overline{BC}$. □

III AIRE D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Nous noterons p le demi-périmètre, *i.e.* $2p = a+b+c$ et S l'aire géométrique du triangle *ABC*.

Définition 1 :

Si h_A, h_B, h_C désignent respectivement les hauteurs issues des sommets *A, B, C*, alors l'aire géométrique S est égale au demi-produit de la base par la hauteur correspondante. Nous notons : $S = \frac{1}{2}a\,h_A$ (et aussi $S = \frac{1}{2}b\,h_B = \frac{1}{2}c\,h_C$).

Théorème 3 :

Nous avons les relations suivantes :

-*i*- $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

-*ii*- $S = \frac{abc}{4R}$.

Démonstration :

-*i*- Par le théorème précédent, $S=\frac{1}{2}a\,h_A$ et $h_A=b\sin\hat{C}$, d'où $S=\frac{1}{2}a\,b\sin\hat{C}$. Il en est de même pour les deux autres égalités.

-*ii*- En utilisant la proposition 1, il vient immédiatement : $S=\frac{1}{2}b\,c\sin\hat{A}=\frac{1}{2}b\,c\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$. □

Théorème 4 (formule de Héron) :

Nous avons :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Démonstration :

De la première formule d'Al Kashi, nous tirons le , à savoir : $\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Comme $\sin\hat{A}$ est positif, nous pouvons le tirer de la relation : $\cos^2\hat{A}+\sin^2\hat{A}=1$, d'où

$\sin^2\hat{A}=1-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}$, et $4b^2c^2\sin^2\hat{A}=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$, puis

$$\begin{aligned}4b^2c^2\sin^2\hat{A}&=\left[2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]\left[2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]=\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-a^2\right],\\&=\left[a+(b-c)\right]\left[a-(b-c)\right]\left[(b+c)^2-a\right]\left[(b+c)-a\right]\left[(b+c)+a\right],\\&=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)2p.\end{aligned}$$

Or $S=\frac{1}{2}b\,c\sin\hat{A}$, d'où $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. □

IV APPLICATIONS.

A) FORMULE DU PARALLELOGRAMME.

Proposition 3 :

Si $ABCD$ est parallélogramme, alors :

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

Démonstration :

Soit I le milieu de $[BD]$ (c'est aussi le milieu de $[AC]$ car ABCD est un parallélogramme). Alors, en appliquant le théorème de la médiane (théorème 2, deuxième égalité) aux triangles ABD et CBD, nous obtenons :

$$AB^2+DA^2=2AI^2+\frac{1}{2}BD^2,$$

$$BC^2+CD^2=2CI^2+\frac{1}{2}BD^2.$$

D'où $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AI^2+2CI^2+BD^2$, *i.e.* :

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

Remarque 2 :

- La réciproque est vraie.

B) AIRE MAXIMALE.

Théorème 5 (inégalité isopérimétrique) :

L'aire géométrique S est inférieure ou égale à la quantité $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ et il y a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral ; ce dernier a donc une aire maximale pour un périmètre $2p$ donné.

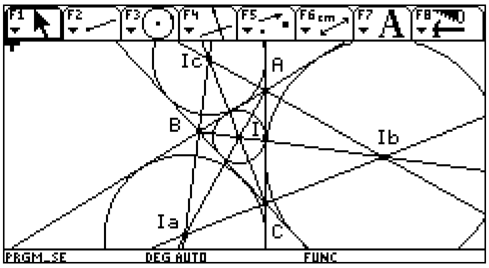
Démonstration :

Nous avons : $\left[(p-a)(p-b)(p-c)\right]^{1/3} \leq \left[(p-a)+(p-b)+(p-c)\right]/3$: En effet, le logarithme népérien du premier membre, égal à $\left[\ln(p-a)+\ln(p-b)+\ln(p-c)\right]/3$, est inférieur à celui du second, en raison de la concavité de la courbe du logarithme népérien. De plus, nous avons $\left[(p-a)+(p-b)+(p-c)\right]=p$ et par le théorème 4 (formule de Héron) : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, nous en déduisons l'inégalité : $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. L'égalité se produit lorsque $\left[(p-a)(p-b)(p-c)\right]^{1/3} = \left[(p-a)+(p-b)+(p-c)\right]/3$, ce qui ne se produit que pour $p-a=p-b=p-c$, c'est à dire lorsque le triangle est équilatéral. □

C) CERCLES INSCRITS ET EXINSCRITS.

Soit I le centre du cercle inscrit et r son rayon, I_A, I_B, I_C centres des cercles exinscrits dans les angles A, B, C et r_A, r_B, r_C leur rayon respectif.

J est le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[BC]$.



Proposition 4 :

Nous avons :

$$S = pr = (p-a)r_A = (p-b)r_B = (p-c)r_c,$$

$$S = \sqrt{r \times r_A \times r_B \times r_C}.$$

Démonstration :

L'aire S est la somme des aires de IBC, ICA, IAB. L'aire de IBC est $BC \cdot IJ/2$, ou encore $ar/2$, celles de ICA et IAB sont respectivement $br/2$ et $cr/2$, d'où $S=(a+b+c)r/2=pr$.

S est aussi la somme des aires de I_ACA et de I_AAB privée de l'aire I_ABC ; ces aires sont respectivement $br_A/2$, $cr_A/2$ et $ar_A/2$, et nous avons $S=(b+c-a)r_A/2=(p-a)r_A$. De même, nous obtenons les deux autres formules.

En multipliant les quatre aires trouvées précédemment, nous trouvons :

$$S^4 = p\,r \times (p-a) r_A \times (p-b) r_B \times (p-c) r_c,$$
$$= p(p-a)(p-b)(p-c)\, r\, r_A\, r_B\, r_c.$$

Puis par la formule de Héron, nous obtenons : $S^2 = r \times r_A \times r_B \times r_C$. □

V CONCLUSION.

Le triangle est une figure géométrique simple qui comporte de nombreuses relations tant métriques que trigonométriques, certaines établies depuis l'antiquité. Ces formules permettent notamment de résoudre des problèmes d'optimisation.