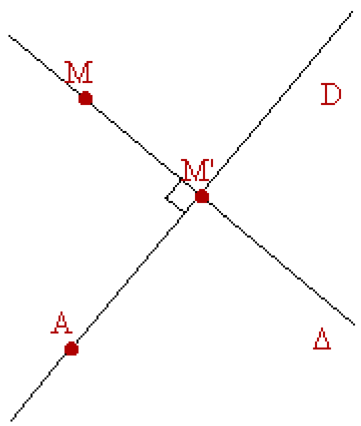
33. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation…).

Sébastien DUCHATEL
pacmandx@yahoo.fr

Niveau : complémentaire
Pré requis : orthogonalité, théorème de Thalès, angles orientés

Soit E un plan affine euclidien d'espace vectoriel associé $\vec{E}$.

1. Projection orthogonale sur une droite du plan



Soit D une droite de E.

Proposition 1.1
Soit M un point de E. Il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D passant par M.

Définition 1.2
On appelle projection orthogonale sur la droite D l'application $p : E \to E$ qui à tout point M de E associe le point M' tel que $\{M'\} = D \cap \Delta$ où Δ est la droite perpendiculaire à D passant par M.

Propriétés 1.2

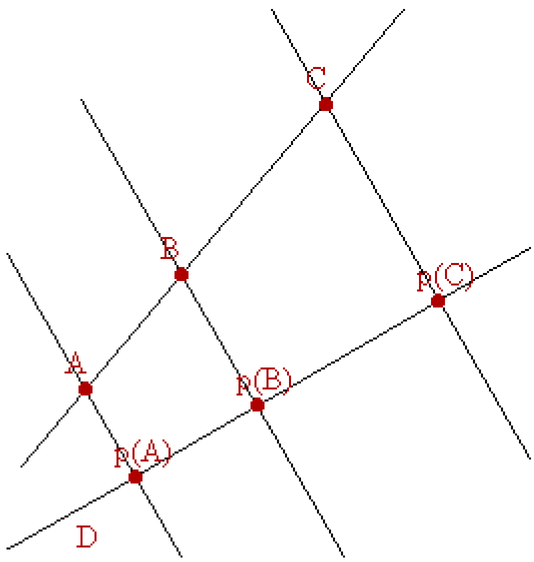
i. $p(E) = D$ (p non surjective).

ii. Si Δ est la droite perpendiculaire à D telle que $\Delta \cap D = \{M\}$ alors $p^{-1}(\{M\}) = \Delta$.

iii. La droite D est l'ensemble des points invariants de p.

iv. $p \circ p = p$.

Proposition 1.3
Soient A, B, C des points deux à deux distincts de E et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. On a alors $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \lambda \overrightarrow{p(A)p(C)}$.



Preuve : Si la droite (AB) n'est pas perpendiculaire à $D,$ alors d'après le théorème de Thalès, on a $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{p(A)p(B)}}{\overline{p(A)p(C)}}$ d'où $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \lambda \overrightarrow{p(A)p(C)}$. Si la droite (AB) est perpendiculaire à D, on a alors $p(A) = p(B) = p(C)$ d'où $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \lambda \overrightarrow{p(A)p(C)}$.

Corollaire 1.4
Une projection orthogonale sur une droite conserve les milieux.

2. Projection vectorielle associée

Soient D une droite de E et p la projection orthogonale sur la droite D.

La motivation principale de cette partie est de démontrer que p est une application affine. On voudrait donc l'existence d'une application π linéaire de E dans E telle que :
$\forall (A,B) \in E^2, \pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)}$.

Proposition 2.1
Soient A, B, A', B' des points de E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. On a alors $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(A')p(B')}$.
Preuve : soit I le milieu de $[AB']$, on a alors I milieu de $[A'B]$. D'après le corollaire 1.4, on a $p(I)$ milieu de $[p(A)p(B')]$ et de $[p(A')p(B)]$. On en déduit :
$\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(A')p(B')}$.

Définition 2.2
On appelle projection vectorielle associée à p l'application $\pi : \vec{E} \to \vec{E}$ qui a un vecteur $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$ associe le vecteur $\overrightarrow{p(A)p(B)}$.

Propriétés 2.3
i. π est linéaire.
ii. Soit $\vec{D}$ la direction de la droite D, $\ker \pi = \vec{D}^{\perp}$ et $\operatorname{Im} \pi = \vec{D}$.
iii. $\pi \circ \pi = \pi$.
Preuve : i. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On a alors :
$\pi(\vec{u}+\vec{v}) = \pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{p(A)p(C)} = \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)p(C)} = \pi(\overrightarrow{AB}) + \pi(\overrightarrow{BC}) = \pi(\vec{u}) + \pi(\vec{v})$.
D'après la proposition 1.3, on a de même $\forall \vec{u} \in \vec{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \pi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

Corollaire 2.4
Une projection orthogonale sur une droite est une application affine. Elle conserve donc les barycentres ce qui est une généralisation du corollaire 1.4.

3. Applications

3.A Calculs d'angles

On oriente E. Soient A, B, C trois points de E deux à deux distincts et p la projection orthogonale sur la droite (AC). On oriente (AC) par le choix d'un vecteur directeur unitaire de (AC). Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. On a alors
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \ \|\overrightarrow{AC}\|\cos\theta$.

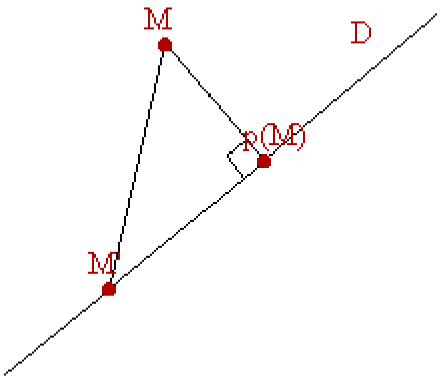
Proposition 3.B.1
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{Ap(B)}\ \overline{AC}$.

On en déduit que $\cos\theta = \dfrac{\overline{Ap(B)}\ \overline{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \ \|\overrightarrow{AC}\|}$. Si le triangle ABC est rectangle en C alors

$\cos\theta = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

3.B. Distance d'un point à une droite

Soient D une droite de E, p la projection orthogonale sur la droite D et M un point de E.



Définition 3.B.1
On appelle distance du point M à la droite D :
$d(M,D) := \inf\{\|\overrightarrow{MM'}\| : M' \in D\}$

Proposition 3.B.2
$d(M,D) = \|\overrightarrow{Mp(M)}\|$

Preuve : pour tout point M' de la droite D, on a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle $MM'p(M)$ rectangle en $p(M)$:
$\|\overrightarrow{M'p(M)}\|^2 + \|\overrightarrow{p(M)M}\|^2 = \|\overrightarrow{MM'}\|^2$
d'où $\|\overrightarrow{p(M)M}\| \leq \|\overrightarrow{MM'}\|$ et comme $p(M) \in D$, on a par définition $d(M,D) = \|\overrightarrow{Mp(M)}\|$.

Proposition 3.B.3
Soit A un point de D et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal non nul à $\vec{D}$. On a alors :
$d(M,D) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

3.C. Optimisation

Soient D une droite de E, A et B deux points de E, α et β deux réels positifs tels que $\alpha+\beta \neq 0$.

On cherche un point M de D tel que $\alpha MA^2 + \beta MB^2$ soit minimum.

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. On a ainsi :
$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$
$= (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB})$
Comme $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, on en déduit l'égalité suivante :
$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$. On en déduit que $\alpha MA^2 + \beta MB^2$ est minimum si $(\alpha+\beta)MG^2$ est minimum d'où $M := p(G)$ convient où p est la projection orthogonale sur la droite D d'après la proposition 3.A.2.

4. Questions posées à la fin de cet exposé

i. Quel est l'ensemble des points équidistants à deux droites ?
ii. Dans un repère orthonormé, soient une droite D d'équation $ax+by+c=0$ et un point M de coordonnés (X,Y). Donner les coordonnées du projeté de M sur la droite D.