Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE : BISSECTRICES, HAUTEURS, MEDIANES, MEDIATRICES…

Niveau : Lycée.

Pré-requis : Vecteurs – Barycentre – Angles orientés –

I INTRODUCTION.

Le triangle est une configuration de base qui se retrouve dans de nombreux domaines. Il est donc nécessaire de l'étudier. Une de ces études portent sur les droites remarquables telles les hauteurs, les médiatrices, les médianes ou les bissectrices. Cet exposé a donc pour objet de définir et d'étudier ces droites. De plus, de nombreux logiciels de géométrie peuvent nous permettre de conjecturer les résultats trouvés ici. Nous ferrons cette étude sur Cabri-géomètre dans le cas des hauteurs, bien que cela ne nous dispense pas de faire la preuve du théorème !

Dans cette leçon, nous considèrerons un triangle ABC non aplati dans un plan euclidien que nous supposerons direct, quitte à changer l'orientation du plan, avec les notations suivantes :

- *a, b*, et *c* sont les longueurs respectives des segments $[BC],[CA],[AB]$,
- A',B',C' sont les milieux respectifs de $[BC],[CA],[AB]$,
- $\hat{A}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right),\hat{B}=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right),\hat{C}=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ les mesures dans $[0,\pi]$ des angles géométriques du triangle ABC.

II HAUTEURS.

Définition 1 :

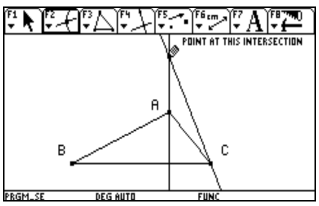
La hauteur issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé. De même pour les deux autres points. Nous notons H_A,H_B,H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A,B,C.

Théorème 1 :

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H nommé orthocentre du triangle.

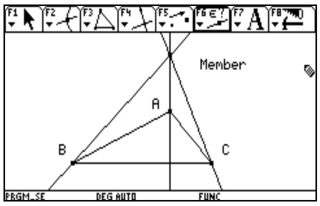
Démonstration :

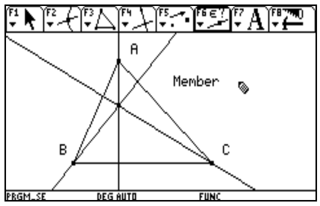
Regardons déjà si nous pouvons trouver ce résultat sur le logiciel Cabri-géomètre de la TI Voyage 200. Pour cela, commençons par tracer deux des trois hauteurs et faisons leur point d'intersection.



Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

Ensuite faisons la troisième hauteur et demandons à la calculatrice si le point d'intersection précédent appartient bien à cette troisième droite. Nous pouvons faire bouger un des trois sommets et regarder si le résultat est toujours le même.





Faisons à présent la démonstration…

Rappelons tout d'abord l'égalité d'Euler : $\forall M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Cette égalité se vérifie simplement en remplaçant $\overrightarrow{CM}$ par $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}$ par $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Soit le point *H*, point d'intersection des hauteurs issues de *A* et *C*. Si un tel point n'existait pas, alors les hauteurs issues de *A* et *C* seraient parallèles, ce qui impliquerait que le triangle serait aplati, ce qui est exclu. Donc le point *H* existe.

Or *H* est sur les hauteurs issues de *A* et de *C*, donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Il ne reste plus qu'à prendre $M=H$ dans l'égalité d'Euler pour avoir : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}=0$, ce qui prouve que *H* est sur la hauteur issue de *B*, ce qui termine la démonstration. □

Définition 2 :

Le quadrilatère *ABCH* est orthocentrique, *i.e.* : chaque point est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.

III MEDIATRICES.

Définition 3 :

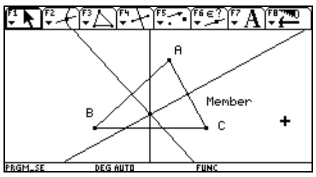
La médiatrice du segment est l'ensemble des points du plan équidistants à chacune des extrémités du segment. C'est aussi la perpendiculaire au segment passant par son milieu.

Théorème 2 :

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point *O*, centre du cercle circonscrit au triangle. Nous avons ainsi $OA=OB=OC$.

Démonstration :

Un petit écran graphique de la calculatrice à ce sujet…



La définition nous dit qu'une médiatrice est une droite perpendiculaire, donc elle est hauteur d'un certain triangle. Soit Δ_A (resp. Δ_B, resp. Δ_C) la médiatrice du segment $[BC]$ (resp. $[CA]$, resp. $[AB]$).

Par propriété des milieux, nous avons : $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'B'} &= \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'},\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

De même, en permutant les lettres, nous trouvons que les cotés du triangle ABC sont parallèles aux côtés du triangle $A'B'C'$. De plus Δ_A, qui est médiatrice de $[BC]$ est aussi hauteur issue de A'. De même pour les autres droites. Ainsi $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ sont les hauteurs du triangles $A'B'C'$, qui comme nous l'avons vu précédemment sont concourantes, et ainsi les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes et par définition des médiatrices, nous avons $OA = OB = OC$: le point de concours est centre du cercle circonscrit. □

IV MEDIANES.

Définition 4 :

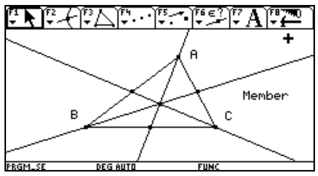
Une médiane est une droite joignant le milieu d'un côté au sommet opposé.

Théorème 3 :

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes au point G isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle situé sur chaque médiane aux $2/3$ à partir du sommet. Nous avons $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démonstration :

Encore un petit écran graphique de la calculatrice.



Soit G l'isobarycentre du triangle ABC. Par associativité barycentrique et avec les notations du début : G est le barycentre du système $\{(A,1);(A',2)\}$ ce qui est équivalent à dire que $G \in (AA')$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. De même, nous montrons que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$. Par définition, nous avons $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. □

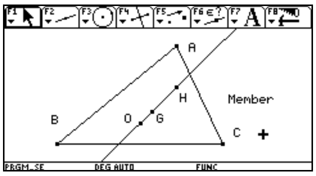
Théorème 4 :

Les points O, G et H sont alignés et nous avons $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Cette droite est appelée droite d'Euler.

etiennesy@wanadoo.fr

Démonstration :

Encore un petit écran de calculatrice pour la route…



Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, nous allons montrer que $M = H$. En effet, nous avons : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) = OC^2 - OB^2 = 0$, de même, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, donc M est sur les trois hauteurs, c'est bien l'orthocentre H.

Or par la relation : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, nous en déduisons en introduisant le point O : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, d'où $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et les points O, G et H sont alignés. □

V BISSECTRICES.

Soit Δ une droite du plan. Nous noterons s_Δ la réflexion d'axe Δ.

Définition 5 :

Soit deux droites D et D' sécantes en O. Soit $A \in D - \{O\}$ et $B \in D' - \{O\}$.

Δ_1 (resp. Δ_2) est la bissectrice intérieure de $([OA),[OB))$ (resp. la bissectrice extérieure de $([OA),[OB))$) si et seulement si : $s_{\Delta_1}([OA)) = [OB)$ (resp. $s_{\Delta_2}([OA)) = D' -]OB)$).

Remarque 1 :

- Nous avons ici défini la bissectrice d'un couple de demi-droites. Les bissectrices d'un couple de droites sont la réunion des deux bissectrices précédemment trouvées.

Définition 6 :

Dans un triangle ABC, nous définissons la bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue de A la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle de demi-droites $([AB),[AC))$.

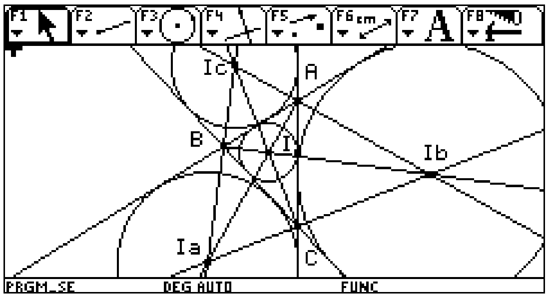
Théorème 5 :

Les bissectrices intérieures d'un triangle non plat ABC sont concourantes en le barycentre I de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$. La bissectrice issue de A (resp. de B ; resp. de C) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de B et C (resp. de C et A ; resp. de A et B) en le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ (resp. I_B de $\{(A,a),(B,-b),(C,c)\}$; resp. I_C de $\{(A,a),(B,b),(C,-c)\}$).

etiennesy@wanadoo.fr

Démonstration :

Un petit schéma ne fait pas de mal…



Le barycentre *I* du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(a+b+c)\overrightarrow{AI}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AI}$ est donc colinéaire à $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$, donc à $\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)/bc=\overrightarrow{AB}/c+\overrightarrow{AC}/b$. Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ et dirige donc la bissectrice intérieure en *A*. Par suite, le barycentre *I* est sur cette dernière ainsi que sur les deux autres bissectrices intérieures : les trois bissectrices sont concourantes en *I*.

De même que précédemment, comme le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(-a+b+c)\overrightarrow{AI_A}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$, il est sur la bissectrice intérieure en *A*. De plus, le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(-a+b+c)\overrightarrow{BI_A}=-a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BC}$, ; donc $\overrightarrow{BI_A}$ est colinéaire à $\left(-a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BC}\right)/ac=\overrightarrow{AB}/c+\overrightarrow{BC}/a$; comme ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{BC}$, il dirige donc la bissectrice extérieure en *B* et I_A se trouve sur celle-ci. De même, la relation $(-a+b+c)\overrightarrow{CI_A}=-a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}$ implique que I_A est sur la bissectrice extérieure en *C*, d'où la dernière propriété de l'énoncé. □

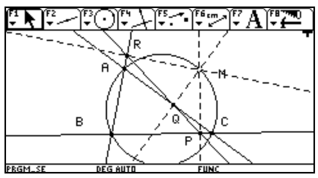
VI DROITES DE SIMSON ET STEINER.

Théorème 6 :

Soit *M* un point du plan. Les trois projetés orthogonaux de *M* sur les droites $(AB),(BC),(CA)$ sont alignés sur une droite appelée droite de Simson de *M*, si et seulement si *M* est sur le cercle circonscrit à *ABC*. Cette propriété est équivalente à l'alignement des trois symétriques de *M* par rapport aux mêmes droites ; ces trois points et l'orthocentre de *ABC* sont alors sur une même droite appelée droite de Steiner de *M*.

Démonstration :

D'abord un schéma :



La droite de Steiner de *M* est l'image de la droite de Simson en *M* par l'homothétie de centre *M* et de rapport 2.

Nous écartons le cas trivial où M est en A, B ou C. Soit P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les trois droites (*cf.* figure). Comme PCM et QCM sont des triangles rectangles qui ont la même hypoténuse, C, P, Q, M sont cocycliques et nous avons :

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)=\left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi].$$

Les triangles rectangles RBM et PBM ont également la même hypoténuse, ainsi R, B, M, P sont cocycliques et nous avons :

$$\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)[\pi].$$

Alors $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)+\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right)[2\pi]$ conduit à :

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)[\pi].$$

L'alignement de P, Q et R est équivalent à $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=0[\pi]$, c'est donc équivalent à $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)=0[\pi]$ ou encore à $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi]$, ce qui est la condition de cocyclicité de M avec ABC, c'est à dire l'appartenance de M au cercle circonscrit. □

VII CONCLUSION.

Nous avons donc étudié quelques droites remarquables au triangle. Le cas d'un triangle particulier peut changer quelques théorèmes. Par exemple, dans le cas d'un triangle équilatéral, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont confondus ; nous ne pouvons alors plus parler de droite d'Euler !