Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

REFLEXION DU PLAN ECHANGEANT DEUX DROITES SECANTES DONNEES, BISSECTRICES. APPLICATIONS AU TRIANGLE ET AU CERCLE (CERCLE CIRCONSCRIT, ANGLE INSCRIT…)

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Angles orientés de deux vecteurs et angle de deux droites – Médiatrice d'un segment – Projection orthogonale sur une droite – Barycentre –

Dans cet exposé, nous nous placerons dans le plan affine euclidien.

I INTRODUCTION.

Dans cet exposé, nous nous demanderons si, étant donné deux droites sécantes en O, il existe au moins une réflexion échangeant ces deux droites. Nous commencerons donc avec quelques rappels, puis nous introduirons la notion de bissectrice d'un couple de droite. Nous verrons enfin quelques applications.

II REFLEXION ECHANGEANT DEUX DROITES SECANTES.

Soit D une droite ; nous rappelons qu'une réflexion d'axe D est l'application du plan dans lui-même qui laisse invariant tout point de D et qui à tout point M du plan n'appartenant pas à D associe le point M' tel que D est la médiatrice de $[M M']$. Nous noterons s_D cette réflexion. Nous donnons deux propriétés importantes pour la suite :

- La réflexion d'axe D est une isométrie du plan, involutive, admettant D comme ensemble de points invariants.
- L'image d'une droite d non parallèle à D est concourante avec d et D.

A) THEOREME ET DEFINITION.

1) BISSECTRICES DE DEUX DROITES.

Théorème 1 :

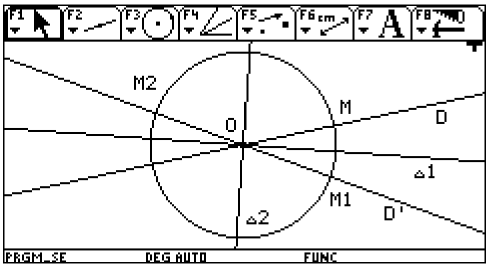
Etant donné deux droites distinctes D et D' concourantes en O, il existe exactement deux réflexions du plan échangeant D et D', *i.e.* : il existe exactement deux droites Δ_1 et Δ_2 du plan telles que $s_{\Delta_1}(D) = D'$ et $s_{\Delta_2}(D) = D'$.

Ces deux droites sont perpendiculaires et passent par O.

Définition 1 :

Les deux axes de symétries précédemment obtenues sont appelées bissectrices du couple de droites (D, D').

Démonstration :



Par la deuxième propriété, si D' est l'image de D par s_Δ alors O est aussi un point de Δ et donc $s_\Delta(O)=O$.

Soit M un point de D avec $M\neq O$. Si $M'=s_\Delta(M)$, nous avons $OM=OM'$, donc M' est à l'intersection du cercle de centre O, passant par M et de D'.

Or D' passe par le centre du cercle, donc le coupe en deux points distincts M_1 et M_2. Notons alors Δ_1 et Δ_2 les médiatrices de $[M\,M_1]$ et de $[M\,M_2]$. Nous avons alors les égalités suivantes : $s_{\Delta_1}(O)=s_{\Delta_2}(O)=O$ et $s_{\Delta_1}(M)=M_1$, d'où $s_{\Delta_1}(D)=(O\,M_1)=D'$. De même $s_{\Delta_2}(D)=D'$. Δ_1 et Δ_2 ne peuvent pas être confondues car sinon, nous aurions deux des trois points M, M_1, M_2 confondus, ce qui est impossible par ce qui précède.

Il reste à montrer que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.

$[M_1M_2]$ est un diamètre du cercle de centre O passant par M. Par définition des réflexions, nous en déduisons que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires. □

Remarques 1 :

- Par le théorème de Thalès, les droites Δ_1 et Δ_2 sont indépendantes du point M choisi sur D.
- En conservant les notations de la démonstration, nous avons $OM=OM_1$. Alors la médiatrice Δ_1 de $[M\,M_1]$ est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM_1}$. En effet,
$$\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM_1}\right)\cdot\overrightarrow{M_1M}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}\right)=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|^2=0.$$
De même, la médiatrice Δ_2 est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$.

2) BISSECTRICE D'UN ANGLE DE DEMI-DROITES.

Définition 2 :

Soit deux droites D et D' sécantes en O et leurs bissectrices Δ_1 et Δ_2. Soit $A\in D-\{O\}$ et $B\in D'-\{O\}$.

Δ_1 (resp. Δ_2) est appelé la bissectrice intérieure de $([OA),[OB))$ (resp. bissectrice extérieure de $([OA),[OB))$) si : $s_{\Delta_1}([OA))=[OB)$ (resp. $s_{\Delta_2}([OA))=D'-]OB)$).

Proposition 1 :

Etant donné l'angle de deux demi-droites $([OA),[OB))$, si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs directeurs de même norme des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, alors $\vec{i}+\vec{j}$ et

$\vec{i}-\vec{j}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle de demi-droites $([OA),[OB))$.

Démonstration :

C'est une conséquence directe de la remarque 1, deuxième point ! □

B) PROPRIETES DES BISSECTRICES.

Dans ce paragraphe, D et D' désignent deux droites concourantes en O.

1) CARACTERISATION ANGULAIRE.

Théorème 2 :

La droite Δ est une bissectrice du couple (D,D') si et seulement si elle passe par O et vérifie $(D,\Delta)=(\Delta,D')[\pi]$, ce qui équivaut aussi à $2(D,\Delta)=(D,D')[\pi]$.

Démonstration :

Comme une réflexion inverse les angles, les équivalences suivantes sont vraies pour toute droite Δ passant par O :

Δ bissectrice de $(D,D') \Leftrightarrow D'=s_\Delta(D) \Leftrightarrow (\Delta,D')=(\Delta,s_\Delta(D))[\pi] \Leftrightarrow (\Delta,D')=(D,\Delta)[\pi]$.

Par la relation de Chasles sur les angles, nous obtenons $2(D,\Delta)=(D,D')[\pi]$. □

2) CARACTERISATION PAR EQUIDISTANCE.

Théorème 3 :

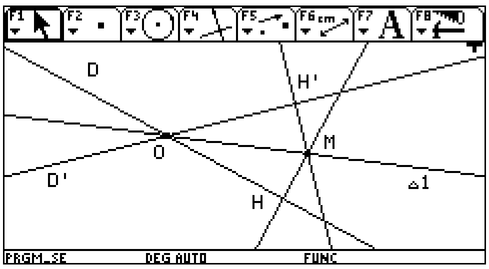
La réunion des bissectrices du couple (D,D') est l'ensemble des points du plan équidistants de deux droites.

Démonstration :

Soit Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices de D et D' et soit $M\in\Delta_1\cup\Delta_2$.

Si $M=O$, alors le théorème est vrai.

Si $M\neq O$, supposons $M\in\Delta_1$, soit H le projeté orthogonal de M sur D.



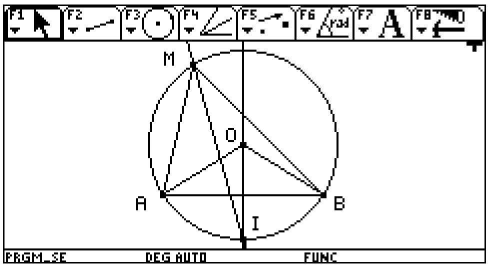
Posons $H'=s_{\Delta_1}(H)$, alors $H'\in D'$ et $MH=MH'$. De plus, $s_{\Delta_1}((MH))=(MH')$ et $s_{\Delta_1}((OH))=(OH')$, et comme $(MP)\perp D$, $(MH')\perp D'$. Ainsi, H' est le projeté orthogonal de M sur D' et nous avons l'égalité $MH=MH'$.

Réciproquement, supposons que $MH=MH'$. Considérons alors les triangles rectangles MHO et $MH'O$, qui ont même hypoténuse $[OM]$. Le théorème de Pythagore montre que $OH=OH'$. Ainsi, (OM) est la médiatrice de $[HH']$, et la réflexion par rapport à la droite (OM) transforme $D=(OH)$ en $D'=(OH')$. La droite (OM) sera donc une bissectrice du couple (D,D') par la définition 1. □

Remarque 2 :
L'ensemble des points du plan équidistant de deux demi-droites distinctes de même origine n'est pas la bissectrice de ces deux demi-droites.

III APPLICATIONS.

A) BISSECTRICE D'UN ANGLE INSCRIT.



Soit un cercle de centre *O*. Soit *A* et *B* deux points distincts du cercle.

Soit *M* un point du cercle distinct de *A* et *B*. Si *I* est le milieu de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ (*i.e.* $\overset{\frown}{AI}=\overset{\frown}{IB}$, arcs orientés *via* $\overset{\frown}{AB}$), nous avons :

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}\right)=\frac{1}{2}mes\left(\overset{\frown}{AI}\right)=\frac{1}{2}mes\left(\overset{\frown}{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MB}\right)[2\pi].$$

Le vecteur $\overrightarrow{MI}$ est donc un vecteur bissecteur du couple $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ et, par suite, la droite (MI) est bissectrice du couple de demi-droites $([MA),[MB))$.

B) BISSECTRICES D'UN TRIANGLE.

Définition 3 :

Dans un triangle *ABC*, nous définissons la bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue de *A* la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle de demi-droites $([AB),[AC))$.

Dans la suite, nous désignerons par *a, b, c* les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle *ABC*.

Théorème 4 :

Les bissectrices intérieures d'un triangle non plat *ABC* sont concourantes en le barycentre *I* de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$. La bissectrice issue de *A* (resp. de *B* ; resp. de *C*) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de *B* et *C* (resp. de *C* et *A* ; resp. de *A* et *B*) en le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ (resp. I_B de $\{(A,a),(B,-b),(C,c)\}$; resp. I_C de $\{(A,a),(B,b),(C,-c)\}$).

Démonstration :

Le barycentre I du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AI}$ est donc colinéaire à $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, donc à $\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)/bc = \overrightarrow{AB}/c + \overrightarrow{AC}/b$. Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ et dirige donc la bissectrice intérieure en A. Par suite, le barycentre I est sur cette dernière ainsi que sur les deux autres bissectrices intérieures : les trois bissectrices sont concourantes en I.

De même que précédemment, comme le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(-a+b+c)\overrightarrow{AI_A} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, il est sur la bissectrice intérieure en A. De plus, le barycentre I_A de $\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ vérifie $(-a+b+c)\overrightarrow{BI_A} = -a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$, ; donc $\overrightarrow{BI_A}$ est colinéaire à $\left(-a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}\right)/ac = \overrightarrow{AB}/c + \overrightarrow{BC}/a$; comme ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{BC}$, il dirige donc la bissectrice extérieure en B et I_A se trouve sur celle-ci. De même, la relation $(-a+b+c)\overrightarrow{CI_A} = -a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$ implique que I_A est sur la bissectrice extérieure en C, d'où la dernière propriété de l'énoncé. □

Corollaire 1 :

Si ABC est un triangle non plat du plan euclidien, l'ensemble des points du plan équidistants des trois droites (AB), (BC), (CA) est formé des quatre points I, I_A, I_B, I_C, définis ci-avant.

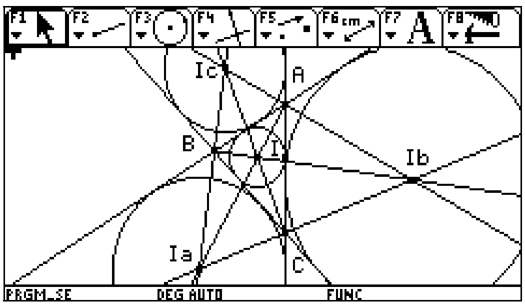
Démonstration :

C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 3. □

Définition 4 :

Le cercle de centre le point de concours des bissectrices intérieures et tangent aux trois côtés du triangle est appelé cercle inscrit dans le triangle.

Le cercle de centre le point de concours de la bissectrice intérieure d'un sommet et de deux bissectrices extérieures issues des deux autres sommets et tangent aux trois côtés du triangle est appelé cercle exinscrit relatif au premier sommet.



IV CONCLUSION.

Nous avons donc montré qu'il existe deux réflexions échangeant deux droites sécantes. Ces axes de symétries sont appelés bissectrices et présentent des propriétés d'équidistance. Ces propriétés permettent notamment de donner l'ensemble des points du plan équidistants aux trois côtés d'un triangle non plat et il y a exactement quatre points qui vérifient cette propriété.