Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

HOMOTHETIES ET TRANSLATIONS ; TRANSFORMATION VECTORIELLE ASSOCIEE. INVARIANTS ELEMENTAIRES : EFFET SUR LES DIRECTIONS, L'ALIGNEMENT, LES DISTANCES… APPLICATIONS A L'ACTION SUR LES CONFIGURATIONS USUELLES.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Espace affine – Transformation – Relation de Chasles –

Nous nous placerons dans un plan affine P de plan vectoriel associé $\vec{P}$. Par convention, une lettre primée désigne l'image de l'objet par l'application considérée.

I INTRODUCTION.

Translater un objet, l'agrandir ou le réduire sont des transformations courantes dans divers domaines tels l'architecture, la physique, ou les mathématiques bien sûr. L'objectif de cet exposé est de caractériser les homothéties et les translations d'un espace affine. Le plan suivit est celui du libellé du sujet.

II HOMOTHETIES ET TRANSLATIONS.

A) TRANSLATION.

Définition 1 :

Nous appelons translation de vecteur $\vec{u}$ l'application :

$$t_{\vec{u}} : P \to P,$$
$$M \mapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Théorème 1 :

Soit $\vec{u} \in \vec{P}$. La translation $t_{\vec{u}}$ est bijective, d'inverse $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

Démonstration :

En effet, $(t_{\vec{u}}) \circ (t_{-\vec{u}}) = (t_{-\vec{u}}) \circ (t_{\vec{u}}) = Id_P$, ce qui montre le théorème. □

B) HOMOTHETIE.

Définition 2 :

Nous appelons homothétie de centre O et de rapport λ $\left(k \in \mathbb{R}^*\right)$ l'application :

$$H_{O,\lambda} : P \to P,$$
$$M \mapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}.$$

Remarque 1 :

- Si λ est égal à -1, l'homothétie est appelée symétrie centrale.

Théorème 2 :

> Soit $O \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie $H_{O,\lambda}$ est bijective, d'inverse $\left(H_{O,\lambda}\right)^{-1} = H_{O,1/\lambda}$.

Démonstration :

En effet, $\left(H_{O,\lambda}\right) \circ \left(H_{O,1/\lambda}\right) = \left(H_{O,1/\lambda}\right) \circ \left(H_{O,\lambda}\right) = Id_P$, ce qui montre le théorème. □

III PROPRIETE VECTORIELLE.

Théorème 3 :

> Une application *f* de *P* dans lui-même est une homothétie ou une translation si et seulement si :
> $$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall (M,N) \in P \times P,\ \overrightarrow{M'N'} = \lambda \overrightarrow{MN}.$$

Démonstration :

- Pour $\lambda = 1$, nous retrouvons les translations. En effet, nous avons les équivalences suivantes :
$$\forall (M,N) \in P \times P,\ \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \forall (M,N) \in P \times P,\ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'},$$
$$\Leftrightarrow \exists \vec{u} \in \vec{P} \text{ tel que } \forall M \in P,\ \overrightarrow{MM'} = \vec{u},$$
$$\Leftrightarrow f = t_{\vec{u}}.$$
- Pour $\lambda = 0$, nous retrouvons l'identité, qui est une translation ou une homothétie particulière.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, nous avons les implications suivantes :
$$\exists\ O \in P \text{ tel que } \forall M \in P, \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM},$$
$$\Rightarrow \exists\ O \in P \text{ tel que } \forall (M,N) \in P \times P, \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{ON'} = \lambda \overrightarrow{ON},$$
$$\Rightarrow \forall (M,N) \in P \times P, \overrightarrow{M'N'} = \lambda \overrightarrow{MN}.$$
Réciproquement, fixons un point *O* du plan, nous avons alors : $\forall M \in P, \overrightarrow{O'M'} = \lambda \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \forall M \in P, \lambda \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OM'}$. Et l'équation d'inconnue $\vec{v}$: $\lambda \vec{v} + \overrightarrow{OO'} = \vec{v}$ admet une unique solution $\dfrac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{OO'}$; donc les applications laissent un unique point fixe, à savoir le point *C* tel que : $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{OO'}$ et nous avons : pour tout point *M* de *P*, $\overrightarrow{CM'} = \lambda \overrightarrow{CM}$. Nous reconnaissons l'homothétie de centre *C* et de rapport λ, $H_{C,\lambda}$. □

Nous rappelons que l'ensemble $\left(T(P), \circ\right)$ est un groupe, où $T(P)$ est l'ensemble des transformations, *i.e.* l'ensemble des applications bijective de *P* dans lui-même.

Nous noterons $D(P)$ l'ensemble des homothéties et des translations de *P*.

Théorème 4 :

$(D(P),\circ)$ est un sous groupe de $(T(P),\circ)$. La composée de deux éléments de $D(P)$ est donc une translation ou une homothétie.

Démonstration :

- $D(P)\subset T(P)$.
- $Id_P \in D(P)$, donc $D(P)$ n'est pas vide.
- Soit $(f,g)\in D(P)\times D(P)$ de rapport respectif λ et μ, alors, $\forall (M,N)\in P\times P$, $\overrightarrow{g\circ f(M)g\circ f(N)}=\mu\overrightarrow{f(M)f(N)}=\lambda\mu\overrightarrow{MN}$, et cette dernière quantité appartient à $D(P)$ par le théorème précédent.
- Soit $f\in D(P)$ de rapport λ, alors f^{-1} existe et nous avons : $\forall (M,N)\in P\times P,\ \overrightarrow{f(M)f(N)}=\lambda\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \forall (M,N)\in P\times P,\ \overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}$, ce qui montre que $f^{-1}\in D(P)$. □

Remarque 3 (importante) :

- Le théorème 3 présente une caractérisation vectorielle dans le sens où la formulation de $f\in D(P)$ ne dépend pas d'un point *O* fixé. Cela définit une homothétie vectorielle de rapport, le rapport de *f*, et cette homothétie vectorielle est appelée transformation vectorielle associée à *f*.

IV INVARIANTS ELEMENTAIRES.

Théorème 5 :

$\forall f\in D(P)$, *f* conserve les barycentres.

Démonstration :

Soit $f\in D(P)$ de rapport λ non nul. Soit la famille $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$, où $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ soit non nul. Alors soit $G\in P$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$. En multipliant les deux membres de l'égalité par λ, nous obtenons : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{G'A_i'}=\vec{0}$, ce qui prouve le théorème. □

Corollaire 1 :

$\forall f\in D(P)$, *f* transforme une droite Δ en une droite $f(\Delta)$ et nous avons : Δ et $f(\Delta)$ parallèle.

Démonstration :

Soit Δ une droite et $(A,B)\in\Delta\times\Delta$ deux points distincts. Alors la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B. Soit $f\in D(P)$ de rapport λ non nul. Par le précédent théorème la droite (AB) est transformé en une droite $(A'B')$. De plus, la relation $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB}$ fournit la condition de parallélisme. □

Corollaire 2 :

$\forall f\in D(P)$, $\forall(A,B)\in P\times P$, f transforme le segment $[AB]$ en le segment $[f(A)f(B)]$ et conserve les milieux.

Démonstration :

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en utilisant le fait que $\forall(A,B)\in P\times P$, le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs. Avec cette vision, les milieux sont évidemment conservés. □

Théorème 6 :

$\forall f\in D(P)$, f conserve les rapports de longueurs et les angles orientés de vecteurs.

Démonstration :

Cela vient encore du théorème 3. □

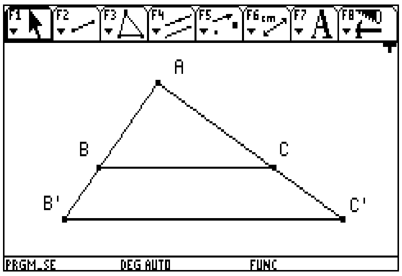
Remarque 4 :

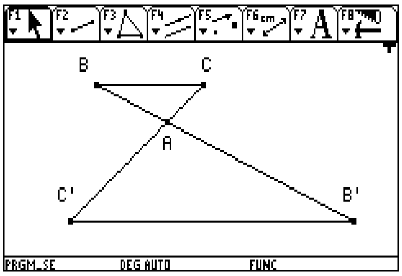
- En dimension impaire supérieure ou égale à trois, les angles orientés ne sont plus conservés si le rapport λ de $f\in D(P)$ est négatif.

V APPLICATIONS.

A) THEOREME DE THALES.

En termes d'homothéties, le théorème de Thalès pour les configurations triangulaires peut s'exprimer de la façon suivante :





Théorème 7 :

Soit ABC un triangle non plat et soit $B'\in(AB)$ et $C'\in(AC)$. Alors les triangles ABC et $AB'C'$ se correspondent par une homothétie de centre A et de rapport

etiennesy@wanadoo.fr

λ si et seulement si (BC) est parallèle à $(B'C')$. Nous avons alors : $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \lambda$.

Démonstration :

- Le sens direct se déduit du corollaire 1. Par le théorème 6, nous avons $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \lambda$.
- Il reste à montrer la réciproque, à savoir si (BC) est parallèle à $(B'C')$, alors les triangles ABC et $AB'C'$ se correspondent par une homothétie de centre A et de rapport λ.

  Dans ce cas considérons l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$. Alors, en utilisant le sens direct, $\lambda = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$, car sinon (BC) ne serait pas parallèle à $(B'C')$, ce qui montre le théorème. □

B) THEOREME DE PAPPUS.

Théorème 8 :

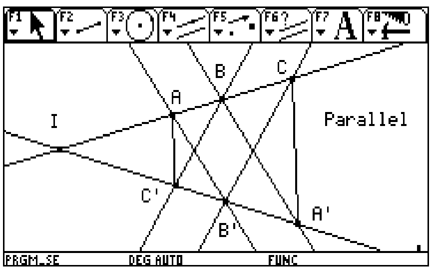
Soit Δ et Δ' deux droites distinctes de P, soit A, B et C trois points distincts sur Δ et A', B' et C' trois points distincts de Δ' (tous distincts de l'éventuel point d'intersection de Δ et Δ'). Alors si (AB') est parallèle à (BA') et si (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA').

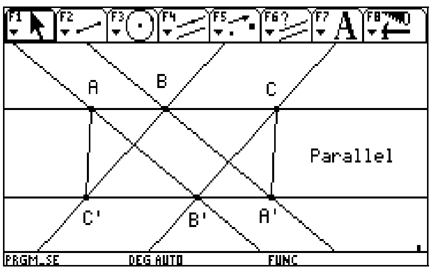
Démonstration :

Si Δ et Δ' sont sécantes en I, nous avons par Thalès $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \lambda$ et $\frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = \mu$.
L'homothétie f de centre I et de rapport λ transforme A en B et B' en A' ; l'homothétie g de centre I et de rapport μ transforme B en C et C' en B'. Le produit $f \circ g$ transforme C' en A' et $g \circ f$ transforme A en C. f et g commutent, car elles ont même centre et leur produit est une homothétie qui transforme (AC') en (CA'), ainsi (AC') et (CA') sont parallèles.

Lorsque Δ et Δ' sont parallèles, il faut faire le même raisonnement avec deux translations au lieu d'homothéties. □

Nous pouvons vérifier ce résultat dans les deux cas précédemment vus sur Cabri-géomètre (ici sur une T.I. Voyage 200).





Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

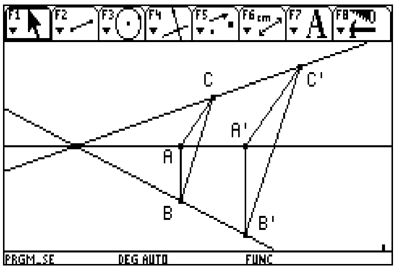
C) THEOREME DE DESARGUES.

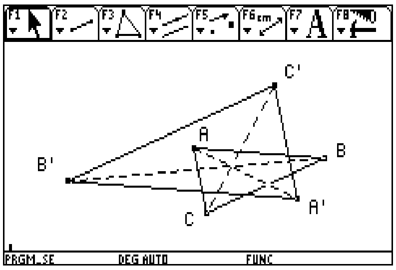
Les parties II, III et IV sont encore vraies en dimension trois et supérieure. Nous allons voir ici, un exemple qui peut être vérifié en dimension finie quelconque. Pour cela nous nous plaçons dans un espace affine E de dimension n, d'espace vectoriel associé $\vec{E}$

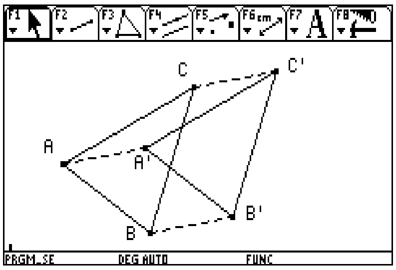
Théorème 9 :

Soit ABC, $A'B'C'$ deux triangles non plats de l'espace affine E avec A distinct de A', B de B' et C de C'. Alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homothétiques ou translatés l'un de l'autre si et seulement si les côtés $[AB],[BC],[CA]$ du premier sont respectivement parallèles aux côtés $[A'B'],[B'C'],[C'A']$ du second.

Sur les figures suivantes, nous avons représenté de gauche à droite le cas d'une homothétie de rapport positif, le cas d'une homothétie de rapport négatif, le cas d'une translation :







Démonstration :

- Supposons les côtés correspondants parallèles. Si (AA'), (BB') et (CC'), deux d'entre elles, par exemple , se coupent en un point I et nous avons, par le théorème de Thalès, $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}=\lambda$. L'homothétie de centre I et de rapport λ transforme A en A' et B en B', la droite (AC) est une droite parallèle qui passe par A' et qui est donc $(A'C')$; de même (BC) est transformé en $(B'C')$ et le point C intersection de (AC) et (BC) est transformé en C', intersection de $(A'C')$ et $(B'C')$. Les points I, C et C' sont donc alignés, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes et les triangles sont homothétiques.
  Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, $ABB'A'$, $ACC'A'$ et $BCC'B'$ sont des parallélogrammes, les triangles sont translatés l'un de l'autre.
- La réciproque est évidente par le corollaire 1. □

VI CONCLUSION.

Nous avons vu que les homothéties et les translations d'un espace affine forment un groupe pour la loi de composition. De plus, l'existence d'une transformation vectorielle pour un élément f du précédent groupe, qui est une homothétie vectorielle, signifie que f est une application affine bijective.