Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE DU PLAN EUCLIDIEN. APPLICATION A L'ETUDE D'INEQUATIONS DE LA FORME $a\cos t + b\sin t \geq c$.

Niveau : Terminale.

Pré-requis : Vecteurs – Définition vectorielle d'une droite – Fonction sinus et cosinus –

Nous nous plaçons dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, et nous noterons $\vec{\mathscr{P}}$ le plan vectoriel associé. $\mathscr{C}$ désignera le cercle trigonométrique de rayon 1.

I INTRODUCTION.

Il existe plusieurs manières de caractériser une droite : de façon vectorielle et de façon paramétrique. Nous allons donner ici une nouvelle caractérisation qui est l'équation cartésienne. Cette nouvelle caractérisation nous permettra de résoudre de façon plus simple des inéquations, comme les inéquations trigonométriques. Le plan choisi est celui donné par l'intitulé.

II EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE DU PLAN.

Théorème 1 :

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ tel que : $\forall M(x,y) \in \mathscr{P}$, $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, $\mathscr{D} = \left\{M(x,y) / ax + by + c = 0\right\}$ est une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$.

Définition 1 :

L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Démonstration :

- Soit $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ avec $A(x_A, y_A)$ un point de la droite et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur.

Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u} \text{ sont colinéaires,}$$

$$\Leftrightarrow \det_{(e_1,e_2)}\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \beta\, x + (-\alpha)\, y + (\alpha\, y_A - \beta\, x_A) = 0.$$

Or $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, donc $\mathcal{D} = \{M(x,y) / a\,x + b\,y + c = 0\}$.

- Réciproquement, considérons $M(x,y)$ vérifiant $a\,x+b\,y+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$.

Comme $(a,b)\neq(0,0)$, il existe $A(x_A,y_A)$ vérifiant $a\,x_A + b\,y_A + c = 0$.

Ainsi, il vient $a\,x+b\,y+c = a\,x_A + b\,y_A + c$, *i.e.* : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. Cette dernière égalité signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Nous obtenons l'équation de la droite $\mathcal{D}(A,\vec{u})$. □

Remarque 1 :

- Cette écriture n'est pas unique. En effet, il suffit de multiplier par une constante non nulle pour s'en apercevoir.

Proposition 1 :

Deux équations $a\,x+b\,y+c=0$ et $a\,x'+b\,y'+c=0$ représente la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Démonstration :

La réciproque étant évidente, regardons le sens direct.

Si les équations $a\,x+b\,y+c=0$ et $a\,x'+b\,y'+c=0$ représente la même droite, alors les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\ a'\end{pmatrix}$ seront colinéaires : soit $k\in\mathbb{R}$ tel que $(a,b)=k(a',b')$. Supposons que b soit non nul, alors le point $\left(0,-\frac{c}{b}\right)\in\mathcal{D}$. De plus, de $a'\,0+b'\left(-\frac{c}{b}\right)+c'=0$, nous tirons $c=k\,c'$ et ainsi : $(a,b,c)=k(a',b',c')$. □

Remarque 2 :

- Supposons $b\neq 0$. Alors $a\,x+b\,y+c=0 \Leftrightarrow y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \Leftrightarrow y=mx+p$ avec $(m,p)\in\mathbb{R}^2$.

  Cette dernière égalité est appelée équation réduite de $\mathcal{D}$. Elle est unique et m s'appelle le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ et p l'ordonnée à l'origine.

III ETUDE D'INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

Nous cherchons, dans ce paragraphe, à résoudre (si c'est possible !) une inéquation du type $a\cos t + b\sin t \geq c$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$, que nous noterons (1). Soit Γ son ensemble de solutions qui peut être éventuellement vide.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. Pour la suite de la leçon, nous posons :

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}, \\ (x,y)&\mapsto a\,x+b\,y-c, \end{aligned}$$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $f(x,y)=0$.

Soit $M(x,y)\in\mathcal{P}$. $M\in\Gamma$ est équivalent à : $f(x,y)\geq 0$ et $x^2+y^2=1$. (2)

L'inégalité $f(x,y)\geq 0$ demande un résultat préalable sur le régionnement du plan par une droite. De plus, une discussion s'impose car $\forall t\in\mathbb{R}, |\cos t|\leq 1$ et $|\sin t|\leq 1$; l'inéquation n'aura pas toujours de solution. Par exemple, si $a=b=1$ et $c=3$, nous n'avons pas de solution. Pour répondre à cette discussion, nous devons mettre en place la notion de distance d'un point à une droite.

A) REGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE DROITE.

Théorème 2 :

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $f(x,y)=0$ partage le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans ouverts :

$$\mathcal{P}_+=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\,/\,f(x,y)>0\} \text{ et } \mathcal{P}_-=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\,/\,f(x,y)<0\}.$$

Nous avons :

-i- $\mathcal{P}=\mathcal{P}_-\cup\mathcal{D}\cup\mathcal{P}_+$ (réunion disjointe).

-ii- $\forall(M,N)$ de $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$), le segment $[MN]$ est dans $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$). Les demi-plans $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ sont dits connexes.

-iii- $\forall(M,N)\in\mathcal{P}_+\times\mathcal{P}_-$, le segment $[MN]$ coupe la frontière $\mathcal{D}$ en un seul point.

Démonstration :

-i- Evident.

-ii- Soit $M(x_M,y_M)\in\mathcal{P}_+$ et $N(x_N,y_N)\in\mathcal{P}_+$. Soit $S(x_S,y_S)\in[MN]$. Soit $\lambda\in[0,1]$ tel que $(x_S,y_S)=\lambda(x_M,y_M)+(1-\lambda)(x_N,y_N)$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} a\,x_S+b\,y_S-c &= a\big(\lambda\,x_M+(1-\lambda)x_N\big)+b\big(\lambda\,y_M+(1-\lambda)y_N\big)-c, \\ &=\lambda(a\,x_M+b\,y_M-c)+(1-\lambda)(a\,x_N+b\,y_N-c)>0. \end{aligned}$$

-iii- Soit $M(x_M,y_M)\in\mathcal{P}_+$ et $N(x_N,y_N)\in\mathcal{P}_-$. Soit $\lambda\in[0,1]$.

$$\begin{aligned} a\big(\lambda\,x_M+(1-\lambda)x_N\big)+b\big(\lambda\,y_M+(1-\lambda)y_N\big)-c &= \lambda(a\,x_M+b\,y_M-a\,x_N-b\,y_N) \\ &\quad+(a\,x_N+b\,y_N-c). \end{aligned}$$

Le membre de droite est une équation linéaire en λ, dont le coefficient est non nul, donc admet une unique solution. En effet, $a\,x_M+b\,y_M-c>0$ et $-(a\,x_N+b\,y_N-c)>0$, d'où le résultat. De plus, la quantité $\dfrac{-(a\,x_N+b\,y_N-c)}{a(x_M-x_N)+b(y_M-y_N)}$ est bien positive par ce qui précède et est inférieure à 1 car $a(x_M-x_N)+b(y_M-y_N)\geq-(a\,x_N+b\,y_N-c)\Leftrightarrow a\,x_M+b\,y_M\geq c$ et la dernière inégalité est vraie. □

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

B) DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

Proposition 2 :

> Soit $M(x_M, y_M) \in \mathscr{P}$. La distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ est :
> $d(M,\mathscr{D}) = \dfrac{|a\,x_M + b\,y_M - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration :

Soit $H(x_H, y_H)$ le projeté de M sur la droite $\mathscr{D}$. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

Nous avons alors : $d(M,\mathscr{D}) = MH = \dfrac{|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{|a(x_H - x_M) + b(y_H - y_M)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Or $H \in \mathscr{D}$ donc vérifie l'équation : $a\,x_H + b\,y_H - c = 0$; d'où : $d(M,\mathscr{D}) = \dfrac{|a\,x_M + b\,y_M - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

C) RETOUR A L'INEQUATION.

En terme d'ensemble, et en gardant les notations précédentes, (2) devient : $\Gamma = (\mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D}) \cap \mathscr{C}$.

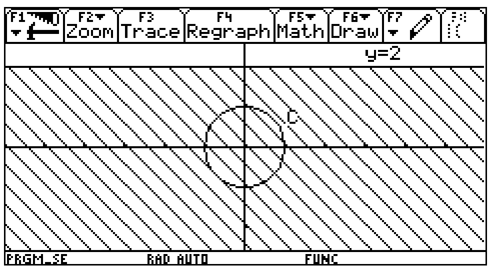
Notons $d = d(O,\mathscr{D}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si $d > 1$, la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$ ne se coupent pas et il y a deux cas de figure : ou bien, la solution de l'inéquation de départ est l'ensemble vide, ou bien c'est le cercle trigonométrique dans son ensemble. Pour trancher, nous utilisons le point -*ii*- et -*iii*- du théorème 2. En effet, si O, par exemple, appartient à $\mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D}$, alors tout réel t satisfait l'inéquation (1) (la réciproque est évidente !). Or $O \in \mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D} \Leftrightarrow c < 0$.
- Si $d \le 1$, la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$ se coupent, éventuellement en un point. Dans ce cas, Γ sera un arc de cercle (éventuellement réduit à un seul point !) d'extrémités les intersections de la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$.

D) EXEMPLES.

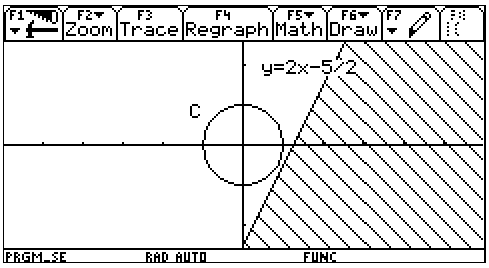
1) Résoudre $\sin t - 2 \ge 0$.

Nous avons $a = 0, b = 1, c = 2$. L'inéquation $\sin t - 2 \ge 0$ n'a pas de solution par ce qui précède. Nous avons $d = 2 > 1$ et $c > 0$, donc $\Gamma = \varnothing$.



2) <u>Résoudre $4\cos t - 2\sin t - 5 \leq 0$.</u>

En multipliant par (-1), nous devons résoudre $-4\cos t + 2\sin t + 5 \geq 0$, ce qui donne $a=-4, b=2, c=-5$. Nous avons : $d = \dfrac{|-5|}{\sqrt{(-4)^2+2^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$ et $c<0$, donc $\Gamma = \mathscr{C}$.

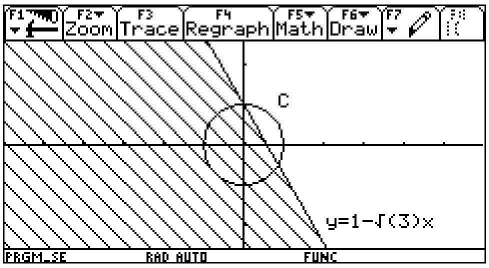


3) <u>Résoudre $\sqrt{3}\cos t + \sin t \geq 1$.</u>

Nous avons $a=\sqrt{3}, b=1, c=1$. D'où $d = \dfrac{1}{2} \leq 1$. Il faut donc chercher les points d'intersection de la droite $\mathscr{D}_1 : \sqrt{3}x + y - 1$ avec le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Nous devons donc résoudre le système : $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ \sqrt{3}x+y=1. \end{cases}$

Nous trouvons : $x^2 + \left(1-\sqrt{3}x\right)^2 = 1$, d'où $x\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ et $\sqrt{3}x + y = 1$, *i.e.* : $(x,y) \in \left\{(0,1), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$. La réciproque est évidente.

Soit $A(0,1), B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, alors $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, arc de cercle contenu dans $\mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D} = \left\{M(x,y) \setminus \sqrt{3}x + y \geq 1\right\}$. Nous aurons alors $\Gamma = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.



IV CONCLUSION.

Nous avons donné une nouvelle caractérisation de droite qui est unique à coefficient multiplicatif près. Cette forme nous permet de résoudre des inéquations tels les inéquations trigonométriques, dont le problème est à rapprocher du problème de position relative d'un cercle par rapport à une droite.