Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

NOMBRES DECIMAUX. APPLICATIONS.

Niveau : Complémentaire.

Pré-requis : Partie entière – Division euclidienne – $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ –

I INTRODUCTION.

Nous supposons la construction de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ acquise. Cependant, il est difficile d'écrire un réel dans son intégralité, à moins de l'écrire sous forme de fonction ; actuellement, nous ne connaissons qu'un nombre fini de décimales pour des réels tels Pi ou $\exp(1)$ (même si nous en connaissons quelques milliards !). Cet exposé a pour objet d'écrire des nombres en utilisant le moins de symboles possibles.

II DEFINITION ET PROPRIETES.

Définition 1 :

L'ensemble des décimaux, noté $\mathbb{D}$, est formé des rationnels q pour lesquels il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n q \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1 :

($\mathbb{D}$, $+,\times$) est un sous-anneau commutatif, intègre.

Démonstration :

Soit $(x,y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, alors $x+y=y+x \in \mathbb{D}$ et $x \times y \in \mathbb{D}$. □

Remarque 1 :

($\mathbb{D}$, $+,\times$) n'est pas un corps. En effet, si $x=1 \in \mathbb{D}$ et $y=3 \in \mathbb{D}$, alors $\frac{x}{y}=\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, notée E, nous avons :

$$E\left(10^n x\right) \leq 10^n x < E\left(10^n x\right)+1.$$

Soit alors les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{E\left(10^n x\right)}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$.

De plus, par définition de la partie entière, les éléments des deux suites précédentes sont uniques, ce qui permet de conclure que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 :

Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, le décimal u_n (resp. v_n) s'appelle l'approximation décimale par défaut (resp. par excès) de x à 10^{-n} près.

Proposition 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers *x*.

Démonstration :

Remarquons auparavant que si *y* est un réel, alors, par définition de la partie entière, nous avons $10E(y) \leq E(10y) < 10(E(y)+1)$.

Montrons que (u_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, dans la première inégalité, prenons $y = 10^n x$, nous obtenons : $10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x)$. Puis, en divisant les deux membres par 10^{n+1}, il vient : $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq \frac{E(10^{n+1} x)}{10^{n+1}} = u_{n+1}$, *i.e.* : (u_n) est croissante.

Montrons, à présent, que (v_n) est décroissante. De la seconde inégalité, appliqué à $y = 10^n x$, nous avons : $E(10^{n+1} x) + 1 \leq 10E(10^n x) + 10$. Puis, en divisant par 10^{n+1}, il vient : $v_{n+1} = \frac{E(10^{n+1} x)}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} = v_n$.

Enfin, nous avons : $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$. □

De ce qui précède, nous avons vu qu'un réel peut être approché par un décimal avec une erreur aussi petite que nous le voulons.

III DEVELOPPEMENT DECIMAL D'UN NOMBRE REEL POSITIF.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit la suite (d_n) définie par : $d_0 = u_0 = E(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = 10^n (u_n - u_{n-1})$. La suite ainsi définie est unique par unicité des u_n. De plus, les quantités $10^n u_n$ et $10^n u_{n-1}$, pour tout entier strictement positif sont des entiers. Donc (d_n) est une suite d'entier ; comme $u_n - u_{n-1}$ est positif ou nul par croissance de (u_n), nous obtenons que pour tout entier naturel *n*, $d_n \in \mathbb{N}$.

Précisons un peu plus d_n pour $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$, alors par définition de la partie entière, nous avons : $10^n x - 1 < 10^n u_n \leq 10^n x$ et $-10^n x \leq -10^n u_{n-1} < 10 - 10^n x$. En ajoutant ces inégalités afin d'obtenir d_n, il vient : $-1 < d_n < 10$. Or $d_n \in \mathbb{N}$, donc $0 \leq d_n \leq 9$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons alors la série de terme général $\frac{d_n}{10^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit S_n la somme partielle d'ordre *n*. Il s'ensuit que : $S_n = d_0 + \frac{d_1}{10^1} + \ldots + \frac{d_n}{10^n} = u_0 + (u_1 - u_0) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$, *i.e.* : $S_n = u_n$. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 1 :

Il existe une unique suite d'entiers naturels $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

-*i*- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$.

-*ii*- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = d_0 + \frac{d_1}{10^1} + ... + \frac{d_n}{10^n}$.

Démonstration :

C'est exactement ce que nous venons de montrer. L'unicité est donné par l'unicité de la suite (u_n). □

Proposition 3 :

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

-*i*- $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$.

-*ii*- Il n'existe pas d'entier $p \geq 0$ tel que $d_n = 9$ pour tout $n > p$.

Démonstration :

-*i*- Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$, nous en déduisons que la série de terme général $\frac{d_n}{10^n}$ est convergente et que sa somme est $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$.

-*ii*- Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $d_n = 9$ pour tout $n \geq p+1$, alors il vient :

$$x = u_p + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = u_p + 9\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = u_p + \frac{9}{10^{p+1}} \frac{1}{1-(1/10)} = u_p + \frac{1}{10^p},$$

ce qui est impossible par définition du nombre u_p. □

Définition 3 :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Les entiers $d_0, d_1, ..., d_n, ...$, tous compris entre 0 et 9, s'appellent les décimales de *x*. Nous notons communément $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et nous avons alors le développement décimal illimité du réel *x*.

Remarques 2 :

- Si $x \in \mathbb{R}_-$, il suffit de chercher le développement décimal de $-x$, *i.e.* : $-x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et nous posons alors $x = -d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$.
- Le point -*ii*- de la proposition 3 s'impose car le réel (qui est décimal !) $x = 2.72$ peut aussi s'écrire sous la forme $x = 2.719999...$ (suite infinie de 9). Cette dernière écriture s'appelle développement décimal impropre du réel *x*.

IV APPLICATIONS.

A) DECIMAL ET INFORMATIQUE.

Dans l'informatique (et donc dans les calculatrices !), les nombres utilisés sont des nombres décimaux. En effet, à moins d'utiliser le calcul formel, la calculatrice donne comme approximation : $\pi \approx 3.14159265359$, approximation à 10^{-11} près. Les ordinateurs sont capable de donner quelques milliards de décimales (un des intérêts de calculer une lointaine décimale est de connaître ainsi la puissance de l'ordinateur ; cependant, cela donne un nombre décimal.

B) NOMBRES RATIONNELS ET DECIMAUX.

Théorème 2 :

Un nombre réel x est un décimal si et seulement si son développement décimal $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ n'utilise qu'un nombre fini de symboles d_i non nuls.

Démonstration :

Nous pouvons supposer x positif.

- $(\Rightarrow)$ Si $x = \dfrac{m}{10^n}$, avec $m \in \mathbb{N}$, nous écrivons $m = d_0 10^n + d_1 10^{n-1} + ... + d_n$, avec $d_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], d_i \in [\![0, 9]\!]$, d'où $x = d_0 + \dfrac{d_1}{10^1} + ... + \dfrac{d_n}{10^n}$.
- $(\Leftarrow)$ Si $x = d_0, d_1 ... d_n$, alors $10^n x \in \mathbb{N}$. □

Définition 4 :

Une suite décimale illimité $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ est périodique s'il existe $(N, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow d_{n+m} = d_n$.

Exemple :

Soit $x = 1.82727...$ où les décimales s'obtiennent en écrivant après la première les chiffres 2 et 7 alternativement.

Nous voulons à présent pouvoir distinguer les irrationnels des rationnels grâce à cette définition. D'où le théorème suivant :

Théorème 3 :

Un nombre réel x est rationnel non décimal si et seulement si son développement décimal illimité est périodique.

Démonstration :

- $(\Leftarrow)$ Supposons que le développement de $x \in \mathbb{R}_+$ soit périodique avec les notations de la définition 4. Posons $y = d_0, d_1 ... d_{N-1}$. Alors $x - y = 10^{-(N-1)} \times 0, d_N ... d_{N+m} ...$; soit $z = 0, d_N ... d_{N+m} ...$. Nous avons : $10^m z = d_N ... d_{N+m} + z$, *i.e.* : $z = \dfrac{d_0 ... d_N}{10^N - 1} \in \mathbb{Q}$.
- $(\Rightarrow)$ Avant de faire la preuve, nous allons donner un résultat important : un algorithme donnant l'écriture décimale d'un rationnel :

Soit un réel positif $x = \dfrac{a}{b}$ où $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Par division euclidienne, il vient :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b, \text{ d'où } x = q + \frac{r}{b}.$$ q représente la partie entière de x.

Ensuite, divisons $10r$ par b : $10r = bq_1 + r_1$ avec $0 \le r_1 < b$. De plus, $q_1 \in [\![0,9]\!]$ car :

$$0 \le 10r = bq_1 + r_1 < 10b \Rightarrow \left(bq_1 < 10b \text{ et } 0 \le bq_1 + b - 1\right) \Rightarrow 0 \le q_1 < 10.$$

Ainsi, $x = q + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$. Et en continuant ainsi, nous obtenons au rang n :

$x = q + \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n b}$, avec les conditions $10r_{n-1} = bq_n + r_n$, $0 \le r_n < b$ et $q_i \in [\![0,9]\!]$, $i \in [\![1,n]\!]$.

Nous obtenons alors le développement décimal de x : $x = q_0, q_1 \ldots q_n \ldots$.

Supposons que $x = \frac{a}{b}$ où $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, alors $x = q_0, q_1 \ldots q_n \ldots$ par ce qui précède. $r_k \in [\![0, b-1]\!]$, donc prend un nombre fini de valeurs. Il existe donc $(m,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, m \neq p$ tel que $r_p = r_m$. De plus :

$$\begin{cases} 10r_m = bq_{m+1} + r_{m+1},\ 0 \le r_{m+1} < b, \\ 10r_p = bq_{p+1} + r_{p+1},\ 0 \le r_{p+1} < b, \end{cases} \Rightarrow q_{m+1} = q_{p+1}, \text{ et } r_{m+1} = r_{p+1}.$$

Et de proche en proche $q_{m+k} = q_{p+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela prouve la périodicité de $x = q_0, q_1 \ldots q_n \ldots$. □

Remarque 3 :

Il est possible de trouver une fraction rationnelle à partir du développement décimal illimité périodique grâce au théorème précédent.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : soit $x = 1.82727\ldots$.

Par définition, nous avons : $x = 1 + \frac{8}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$, où $x_{2k+1} = 7$ et $x_{2k} = 2$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Soit $y = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$, d'où $y = \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{1}{10^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{1}{10^2} y$, et enfin en multipliant par 10^3, nous trouvons : $y = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$. Enfin : $x = 1 + \frac{8}{10} + \frac{3}{110} = \frac{201}{110}$.

V CONCLUSION.

Entre les entiers relatifs et les rationnels, nous avons introduit les nombres décimaux. De plus, l'introduction de cet anneau permet d'approximer tous les réels de façon aussi précise que nous le souhaitons. C'est une application qui trouve une importante place en informatique.