Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

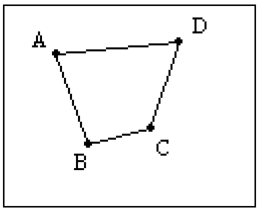
EXEMPLES DE PROBLEMES DONT LA RESOLUTION FAIT APPEL A L'UTILISATION DE GRAPHES, ORIENTES OU NON.

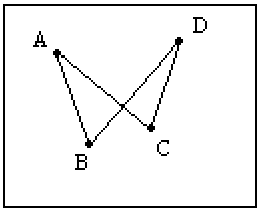
Niveau : Terminale ES.

Pré-requis : Vocabulaire et définitions sur les graphes (graphe orienté ou non, sommets, arêtes…) – Matrices – Suites – Récurrence –

I INTRODUCTION.

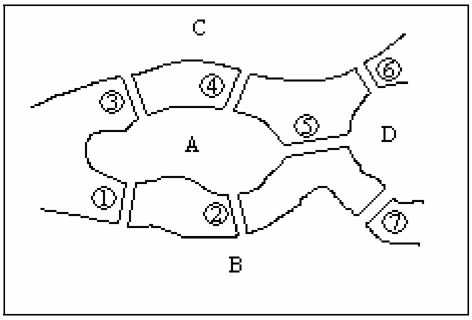
Donnons-nous quatre points A, B, C et D. Les quadrilatères ABCD et ABDC sont différents comme le montre les figures suivantes. Intuitivement, depuis les petites classes, les élèves ont la notion de sommets et d'arêtes.





Historiquement, l'un des premiers problèmes à avoir été représenté par des graphes est le suivant :

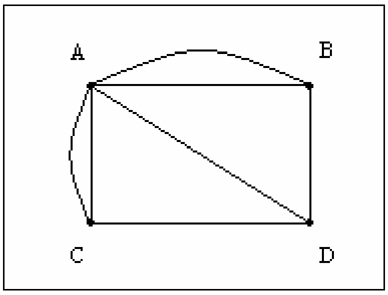
Dans les années 1730, un problème passionnait beaucoup de monde à Königsberg en Prusse orientale. La ville est traversée par un fleuve, nommé Prégolia, et il y a deux îles. De plus, sept ponts permettent d'aller d'un endroit à un autre, disposés comme ci-contre.



Au cours de leur promenade du dimanche, les habitants se demandaient s'il était possible de trouver un itinéraire qui les ramène à leur point de départ et qui leur fasse traverser une fois, et une seule, chaque pont.

Euler (1707 – 1783) représenta ce problème de la façon suivante : chaque partie de la ville A, B, C et D est symbolisée par un point, et une arête symbolise un pont. Nous obtenons alors le graphe ci-contre.

Il montra que c'était impossible.



Ces deux points sont à la base des graphes qui sont étudiés, mais dans une approche non formel, en classe de Terminale ES. Nous allons étudier quelques exemples de problème nécessitant la mise en place de graphe afin de les résoudre simplement.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

II GRAPHES NON ORIENTES.

Enoncé 1 :

> Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons climatiques, chaque club ne pourra jouer que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ?
>
> *Indication :* Commencer par étudier le cas de 7 équipes.

Réponse :

- Sans les graphes : commençons avec les 7 équipes. Comptons dans ce cas le nombre de matchs possibles qui seront joués. Chacune des équipes peut jouer 6 matchs, mais à cause du temps, elle n'en jouera que 3. Cependant, il ne faut pas accepter les répétitions, donc il faut diviser par 2 le nombre total de matchs. Nous avons ainsi $\frac{3\times 7}{2}=\frac{21}{2}$ matchs, ce qui est absurde pour des raisons arithmétiques… De même, dans le cas des 15 clubs, si chaque club joue la moitié des matchs possibles, soit 7, il doit y avoir $\frac{15\times 7}{2}$ matchs en tout : l'organisation d'un tel tournoi n'est donc pas possible !
- En termes de graphes, ce problème revient à regarder la somme *s* des degrés de tous les sommets d'un graphe *G*. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1 :

> La somme *s* du graphe *G* est égale au double du nombre total d'arêtes. C'est donc un nombre pair.

Démonstration :

Lorsque nous additionnons les degrés des sommets – rappelons que le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité – chaque arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. □

Revenons à notre problème : nous représentons une équipe par un point, et un match par une arête. Le théorème précédent donne que *s* est un nombre pair. Or, ici dans le cas de 7 clubs, nous avons $s=3\times 7$. Ce nombre n'est manifestement pas pair, il y a donc une impossibilité. Il en va de même pour 15 clubs.

Des problèmes très différents peuvent se représenter de la même manière. Par exemple :

Enoncé 2 :

> Est-il possible de tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ? Exactement 2 autres ?

Réponse :

Il suffit de représenter chaque segment par un point et à relier deux points si les deux segments correspondants se coupent. De même que dans l'exercice précédent, ce n'est pas possible dans le premier cas. Dans le second cas, c'est possible et une figure possible est le pentagone.

Les énoncés précédent donnent des résultats non évidents. En effet, pour montrer qu'un problème est possible, il suffit d'exhiber une solution tandis qu'il est beaucoup plus difficile de démontrer une impossibilité, car il faut un raisonnement.

Le problème précédent mettait en scène des piétons qui peuvent aller dans un sens ou dans un autre. Nous allons nous intéresser à présent à des automobilistes qui sont soumis à des sens interdits. Dans ce cas, nous parlerons de graphe orienté.

III GRAPHES ORIENTES.

Définition 1 :

Considérons un graphe G à n sommets numérotés de 1 à n.

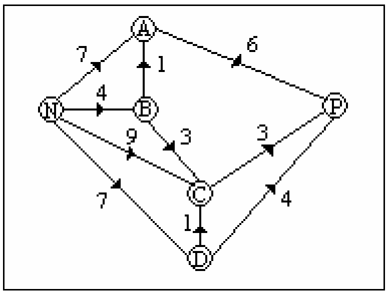
La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée M de format $n \times n$ dont l'élément a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Pour un graphe orienté, le nombre a_{ij} est égal au nombre d'arêtes orientées allant de i à j.

Enoncé 4 :

Un transporteur doit acheminer une cargaison entre une ville notée N et une ville notée P, en passant ou non par 4 autres villes, notées A, B, C, D. Les accès et les kilométrages qui leur sont associés sont résumés par le graphe G ci-contre.

Nous cherchons les chemins possibles et bien évidemment quel est le chemin le plus court.



Réponse :

Commençons par donner la matrice M associée au graphe G ; cette matrice aura pour taille 6×6 et nous avons :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A l'aide d'une calculatrice, nous obtenons les premières lignes des différentes puissances de M :

Pour $M^2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

Pour $M^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

Et $M^4 = 0$.

Ainsi, il y a 3 chaînes de longueurs 2 et 3 chaînes de longueurs 4 qui permettent d'aller de la ville N à la ville P et ce sont les seules.

Les trois chaînes de longueurs 2 sont : NAP, NCP, NDP, avec comme kilométrage respectif : 13, 12 et 11 kilomètres.

Les trois chaînes de longueurs 3 sont : NBAP, NBCP et NDCP, avec comme kilométrage respectif : 11, 10 et 11 kilomètres.

Le chemin le plus court en terme de kilométrage est donc la chaîne NBCP avec 10 kilomètres. Il est à remarquer que le chemin le plus court (toujours en terme de kilométrage) passe par trois villes alors que d'autres chaînes passent seulement par deux villes.

Une autre solution consiste à utiliser l'algorithme de Dijkstra. Nous trouvons le tableau suivant :

N	A	B	C	D	P
0	7	4	9	7	$+\infty$
	5		7		
					11
					10
0	5	4	7	7	10

Ce problème reste assez simple car les possibilités sont plutôt réduites ; cependant, il suffit parfois de rajouter quelques arêtes ou quelques sommets pour avoir une complexité très importante. La première méthode qui consiste à voir tous les chemins pour déterminer le chemin le plus court a un nombre d'étapes, en général exponentiel. L'algorithme de Dijkstra a un nombre d'étapes de l'ordre du carré du nombres de sommets.

IV GRAPHES PROBABILISTES.

Nous allons nous intéresser à présent à une expérience aléatoire à deux issues possibles. Cette expérience est répétée dans le temps par étapes successives. Nous allons donc utiliser la théorie des graphes pour résoudre le problème suivant.

Enoncé 5 :

Un individu vit dans un lieu où il susceptible de contracter une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois cas suivants : immunisé (I), malade (M), sain (*i.e.* : ni malade, ni immunisé) (S). D'un mois sur l'autre, son état peut évoluer selon les règles suivantes :

- Etant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité de 0,1.
- Etant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité de 0,5.
- Etant malade, il peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,8.

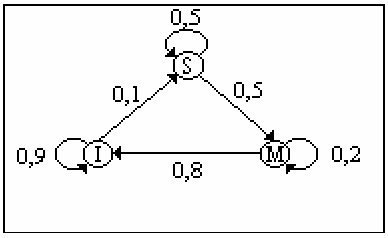
La question que nous nous posons est de déterminer la probabilité que l'individu soit malade ou immunisé au bout de trois mois, six mois, un an, deux ans dans chacune des situations suivantes :

- Au départ, il est immunisé.
- Au départ, il est sain.
- Au départ, il est malade.

Sylvain ETIENNE
PLC 1
etiennesy@wanadoo.fr

Réponse :

Traçons le graphe probabiliste relatif à notre problème.

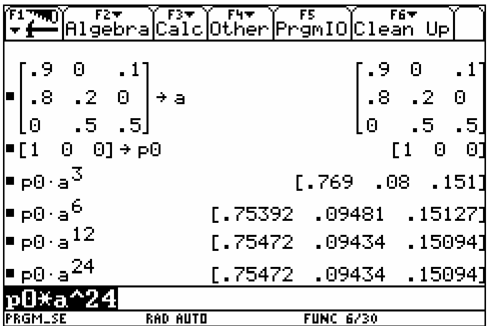


Ce graphe permet alors de remplir la matrice associée :

$$A=\begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

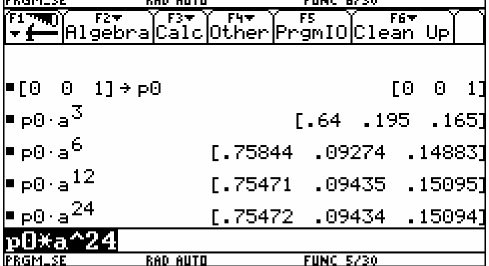
Notons alors pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \begin{bmatrix} u_n & v_n & w_n \end{bmatrix}$ où u_n, v_n, w_n représentent respectivement les probabilités que l'individu se trouve dans l'état I, M et S au bout de n mois. Nous avons (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, à partir de la formule : $P_{n+1} = P_n A$) $P_n = P_0 A^n$.

Si au départ, l'individu est immunisé, nous avons $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nous obtenons, grâce à une calculatrice, les résultats suivants à 10^{-5} près.

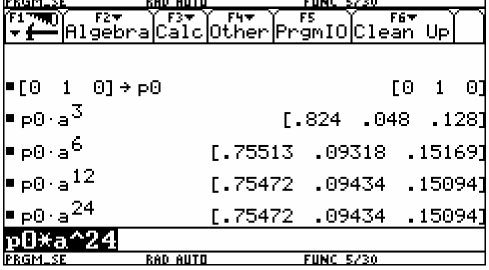


Ensuite, il ne reste plus qu'à lire les résultats : la probabilité d'être immunisé est la première composante et celle d'être malade est la deuxième.

De même, si au départ, l'individu est sain, alors $P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et nous obtenons les résultats ci-contre.



Enfin, si au départ, l'individu est malade, alors $P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et nous obtenons les résultats ci-contre.



Passons à l'interprétation des résultats : nous pouvons remarquer que les vecteurs P_n se stabilisent assez rapidement ; un changement d'état initial entraîne une variation inférieure à 10^{-2} pour P_6 et inférieure à 10^{-5} pour P_{12}. En particulier, la probabilité qu'un individu soit malade au bout de deux années est de 0,09434 à 10^{-5} près. En termes de population, cela signifie qu'environ 9 à 10% des gens seront malades au bout d'une année, et ce quelque soit l'état initial.

En conclusion de ce problème, afin de maîtriser cette maladie, ce n'est pas l'état initial qui compte. Ce sont les probabilités de passage d'un état à un autre qui déterminent la position limite et la convergence vers celle-ci. Les conséquences de ce fait sont d'ordre pratique : en effet, si nous voulons améliorer l'état de la population, il faut changer de façon durable les coefficients de la matrice en utilisant, par exemple, des vaccins ou en luttant contre les insectes.

VI CONCLUSION.

Nous avons vu que de nombreux problèmes font appel à des graphes pour les résoudre. Ces problèmes sont de natures diverses et ils montrent comment l'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique. Un exemple intéressant, non développé ici, est le coloriage des sommets d'un graphe avec la notion de nombre chromatique. Une importante application est le fameux problème des quatre couleurs, résolu dans les années 1970 grâce à un ordinateur.

COMPLEMENT :

Initialement, l'énoncé suivant était présenté dans la section IV GRAPHES PROBABILISTES. Cependant, le lien avec les probabilité n'étant pas explicite, et les graphes n'ayant pas une place très importante pour résoudre le problème (compte tenu des hypothèses), l'énoncé a été changé. L'exercice suivant peut avoir une place dans le dossier sur les matrices.

Nous allons nous intéresser à présent à une expérience aléatoire à deux issues possibles. Cette expérience est répétée dans le temps par étapes successives. Nous allons donc utiliser la théorie des graphes pour résoudre le problème suivant.

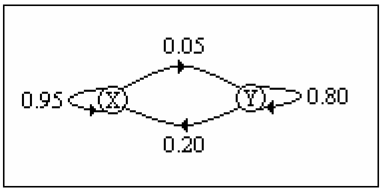
Enoncé 5 :

> Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. Ces villes sont supposées isolées du reste du monde. La ville X est plus agréable à vivre, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X, tandis que 5% des habitants de X partent habiter Y. En l'an 0, un quart de la population est en X. Il faut calculer la population de X et Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans. Refaire ces calculs dans le cas où 99% des habitants sont en X ou en Y en l'an 0 et dans le cas équi-repartie.

Réponse :

Demandons-nous à quelle condition les populations des deux villes sont stables. De façon intuitive, il faut que les flux dans chaque sens s'équilibrent. Comme il y a 4 fois plus de départ de la ville Y que de X, la population de X devrait être 4 fois plus importante. Ainsi, nous aurions 200 000 habitants en Y et 800 000 en X ; dans ce cas, 40 000 habitants partent chaque année, et la répartition globale ne change pas. Mais qu'en est-il dans le cas général ?

Commençons par dessiner le graphe correspondant à l'énoncé.



Notons $P_n = \begin{bmatrix} X_n & Y_n \end{bmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population au bout de *n* années. Nous avons alors la relation de récurrence : $P_{n+1} = P_n M$, où M est la matrice de transition du système et nous avons : $M = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$.

Nous avons alors la relation : si P_0 désigne le vecteur ligne qui décrit la population en l'an 0, $P_n = P_0 M^n$.

Si en l'an 0, un quart de la population se trouve en X, donc nous avons : $P_0 = \begin{bmatrix} 250\,000 & 750\,000 \end{bmatrix}$. En appliquant la formule pour $n = 1, 2, 5, 10$, nous obtenons :

$P_1 = P_0 M = \begin{bmatrix} 250\,000 & 750\,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 387\,500 & 612\,500 \end{bmatrix}$. De même, nous trouvons : $P_2 = \begin{bmatrix} 490\,625 & 509\,375 \end{bmatrix}$. Pour la suite, nous sommes obligés d'arrondir car les habitants sont des entiers !

etiennesy@wanadoo.fr

Nous trouvons alors : $P_5 = [669\,483 \quad 330\,517]$ et $P_{10} = [796\,028 \quad 230\,973]$. En allant un peu plus loin, nous trouvons : $P_{30} = [799\,903 \quad 200\,097]$ et $P_{40} = [799\,994 \quad 200\,006]$.

Changeons à présent l'état initial et supposons que Y a 99% de la population totale ; nous obtenons alors : $P_0 = [10\,000 \quad 990\,000]$, $P_1 = [207\,500 \quad 792\,500]$, $P_2 = [355\,625 \quad 644\,375]$, $P_{10} = [755\,512 \quad 244\,488]$ et $P_{40} = [799\,992 \quad 200\,008]$. Si nous supposons qu'au départ, c'est X qui contient 99% de la population, nous obtenons : $P_0 = [990\,000 \quad 10\,000]$, $P_{10} = [810\,700 \quad 189\,300]$ et $P_{40} = [800\,002 \quad 199\,998]$.

Enfin, pour une répartition initiale équilibrée, nous avons : $P_0 = [500\,000 \quad 500\,000]$, $P_1 = [575\,000 \quad 425\,000]$, $P_{10} = [783\,106 \quad 216\,894]$.

En conclusion, il semble bien que, quelque soit l'état initial du système, la population tend vers une population stable. Ainsi, si nous voulons changer cet état à long terme ce n'est pas la position initiale qu'il convient de bouger mais les coefficients de la matrice *M*.